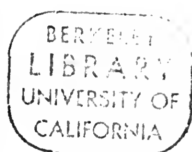


Nov. 30, 1904.
Netto M 4.20
Einb. 2.—
Porto .70 6.90

C. A. Noble
Berkeley.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

Dr. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

ZWEITE, DURCH ZUSÄTZE VERMEHRTE UND MIT FÜNF ANHÄNGEN VERSEHENE AUFLAGE.

MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Inhalt.

Grundlagen der Geometrie.

Aus der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899.

Kapitel VI. Der Pascalsche Satz.

Kapitel VII. Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—IV.

Anhang I.

Anhang II.

Anhang III.

Anhang IV.

Anhang V.

Verzeichnis der Begriffsnamen.

Die den Begriffsnamen beigefügten Zahlen bezeichnen diejenigen Seiten des Buches, auf denen der Begriff erklärt ist.

So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.

Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre 2. T. 2. Abt.

Einleitung.

Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit *Euklid* in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur[1]) sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zu Tage tritt.

1) Man vergleiche die zusammenfassenden und erläuternden Berichte von *G. Veronese*, „Grundzüge der Geometrie", deutsch von *A. Schepp*, Leipzig 1894 (Anhang), und *F. Klein*, „Zur ersten Verteilung des *Lobatschefsky*-Preises", Math. Ann. Bd. 50.

Kapitel I.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1.

Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heißen auch die *Elemente der linearen Geometrie,* die Punkte und Geraden heißen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes.*

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „parallel“, „kongruent“, „stetig“; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie.*

Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I 1—8. Axiome der *Verknüpfung,*
II 1—4. Axiome der *Anordnung,*
III 1—6. Axiome der *Kongruenz,*
IV. Axiom der *Parallelen,*
V 1—2. Axiome der *Stetigkeit.*

§ 2.

Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung.

Die Axiome dieser Gruppe stellen zwischen den oben erklärten Begriffen Punkte, Geraden und Ebenen eine *Verknüpfung* her und lauten wie folgt:

I 1. *Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a.*

Statt „bestimmen" werden wir auch andere Wendungen gebrauchen, z. B. a „geht durch" A „und durch" B, a „verbindet" A „und" oder „mit" B. Wenn A ein Punkt ist, der mit einem anderen Punkte zusammen die Gerade a bestimmt, so gebrauchen wir auch die Wendungen: A „liegt auf" a, A „ist ein Punkt von" a, „es gibt den Punkt" A „auf" a u. s. w. Wenn A auf der Geraden a und außerdem auf einer anderen Geraden b liegt, so gebrauchen wir auch die Wendung: „die Geraden" a „und" b „haben den Punkt A gemein" u. s. w.

I 2. *Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.*

I 3. *Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.*

I 4. *Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α.*

Wir gebrauchen auch die Wendungen: A, B, C „liegen in" α; A, B, C „sind Punkte von" α u. s. w.

I 5. *Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen die Ebene α.*

I 6. *Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.*

In diesem Falle sagen wir: die Gerade a liegt in der Ebene α u. s. w.

I 7. *Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.*

I 8. *Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

Die Axiome I 1—3 mögen die *ebenen Axiome der Gruppe* I heißen zum Unterschied von den Axiomen I 4—8, die ich als die *räumlichen Axiome der Gruppe* I bezeichne.

Von den Sätzen, die aus den Axiomen I 1—8 folgen, erwähne ich nur diese beiden:

Satz 1. Zwei Geraden einer Ebene haben einen oder keinen Punkt gemein; zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein; eine Ebene und eine nicht in ihr liegende Gerade haben keinen oder einen Punkt gemein.

Satz 2. Durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt, sowie auch durch zwei verschiedene Geraden mit einem gemeinsamen Punkt gibt es stets eine und nur eine Ebene.

§ 3.

Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung[1]).

Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff „zwischen" und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort *„zwischen"* dient.



II 1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*

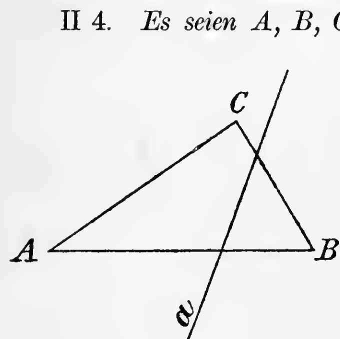
II 2. *Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt.*



II 3. *Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.*

Erklärung. Wir betrachten auf einer Geraden a zwei Punkte A und B; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit AB oder mit BA. Die Punkte zwischen A und B heißen Punkte der Strecke AB oder auch *innerhalb* der Strecke AB gelegen; die Punkte A, B heißen *Endpunkte* der Strecke AB. Alle übrigen Punkte der Geraden a heißen *außerhalb* der Strecke AB gelegen.

II 4. *Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.*



Die Axiome II 1—3 enthalten nur Aussagen über die Punkte auf einer Geraden und mögen daher die *linearen Axiome der*

1) Diese Axiome hat zuerst *M. Pasch* in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, ausführlich untersucht. Insbesondere rührt das Axiom II 4 inhaltlich von *M. Pasch* her.

Gruppe II heißen; das Axiom II 4 enthält eine Aussage über die Elemente der ebenen Geometrie und heiße daher das *ebene Axiom der Gruppe* II.

§ 4.

Folgerungen aus den Axiomen der Verknüpfung und der Anordnung.

Aus den Axiomen I und II folgen die nachstehenden Sätze:

Satz 3. Zwischen irgend zwei Punkten einer Geraden gibt es stets unbegrenzt viele Punkte.

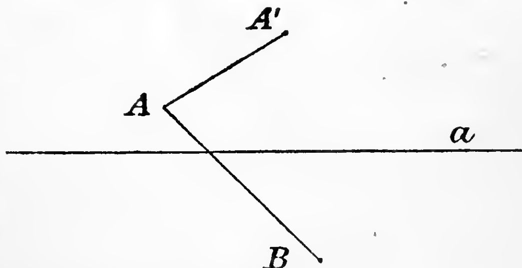
Satz 4. Sind irgend vier Punkte einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in der Weise mit A, B, C, D bezeichnen, daß der mit B bezeichnete Punkt zwischen A und C und auch zwischen A und D und ferner der mit C bezeichnete Punkt zwischen A und D und auch zwischen B und D liegt[1]).

Satz 5 (Verallgemeinerung von Satz 4). Sind irgend eine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in der Weise mit $A, B, C, D, E, \ldots, K$ bezeichnen, daß der mit B bezeichnete Punkt zwischen A einerseits und $C, D, E, \ldots, K$ andererseits,



ferner C zwischen A, B einerseits und $D, E, \ldots, K$ andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und $E, \ldots, K$ andererseits u. s. w. liegt. Außer dieser Bezeichnungsweise gibt es nur noch die umgekehrte Bezeichnungsweise $K, \ldots, E, D, C, B, A$, die von der nämlichen Beschaffenheit ist.

Satz 6. Jede Gerade a, welche in einer Ebene α liegt, trennt die nicht auf ihr liegenden Punkte dieser Ebene α in zwei Gebiete, von folgender Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des anderen Gebietes eine Strecke AB, innerhalb derer ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und A' ein und desselben Gebietes eine Strecke AA', welche keinen Punkt von a enthält[2]).



1) Dieser in der ersten Auflage als Axiom bezeichnete Satz ist von *E. H. Moore*, Transactions of the American Mathematical Society 1902, als eine Folge der aufgestellten ebenen Axiome der Verknüpfung und der Anordnung erkannt worden.

2) Vgl. den Beweis bei *M. Pasch* l. c. S. 25.

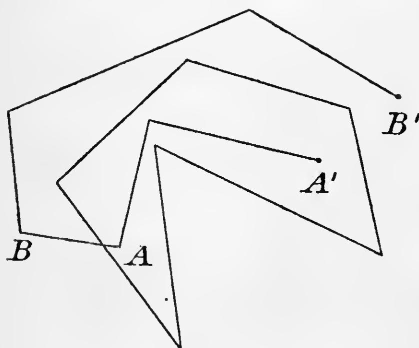
Erklärung. Es seien A, A', O, B vier Punkte einer Geraden a, so daß O zwischen A und B, aber nicht zwischen A und A' liegt; dann sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Geraden a auf ein und derselben Seite vom Punkte O*, und die Punkte A, B liegen *in der Geraden a auf verschiedenen Seiten vom Punkte O.* Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden a heißen auch ein von O ausgehender *Halbstrahl;* somit teilt jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbstrahlen.

Erklärung. Indem wir die Bezeichnungen des Satzes 6 benutzen, sagen wir: die Punkte A, A' liegen *in der Ebene α auf ein und derselben Seite von der Geraden a* und die Punkte A, B liegen *in der Ebene α auf verschiedenen Seiten von der Geraden a.*

Erklärung. Ein System von Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KL$ heißt ein *Streckenzug,* der die Punkte A und L miteinander verbindet; dieser Streckenzug wird auch kurz mit $ABCD \ldots KL$ bezeichnet. Die Punkte innerhalb der Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KL$, sowie die Punkte $A, B, C, D, \ldots, K, L$ heißen insgesamt die *Punkte des Streckenzuges.* Fällt insbesondere der Punkt L mit dem Punkt A zusammen, so wird der Streckenzug ein *Polygon* genannt und als Polygon $ABCD \ldots K$ bezeichnet. Die Strecken $AB, BC, CD, \ldots, KA$ heißen auch die *Seiten des Polygons.* Die Punkte $A, B, C, D, \ldots, K$ heißen die *Ecken des Polygons.* Polygone mit $3, 4, \ldots, n$ Ecken heißen bez. *Dreiecke, Vierecke, ..., n-Ecke.*

Erklärung. Wenn die Ecken eines Polygons sämtlich voneinander verschieden sind und keine Ecke des Polygons in eine Seite fällt und endlich irgend zwei Seiten eines Polygons keinen Punkt miteinander gemein haben, so heißt das Polygon *einfach.*

Mit Zuhilfenahme des Satzes 6 gelangen wir jetzt ohne erhebliche Schwierigkeit zu folgenden Sätzen:



Satz 7. Ein jedes einfache Polygon, dessen Ecken sämtlich in einer Ebene α liegen, trennt die Punkte dieser Ebene α, die nicht dem Streckenzuge des Polygons angehören, in zwei Gebiete, ein Inneres und ein Äußeres, von folgender Beschaffenheit: ist A ein Punkt des Inneren (innerer Punkt) und B ein Punkt des Äußeren (äußerer Punkt), so hat jeder Streckenzug, der A mit B verbindet,

mindestens einen Punkt mit dem Polygon gemein; sind dagegen A, A' zwei Punkte des Inneren und B, B' zwei Punkte des Äußeren, so gibt es stets Streckenzüge, die A mit A' und B mit B' verbinden und keinen Punkt mit dem Polygon gemein haben. Es gibt Gerade in α, die ganz im Äußeren des Polygons verlaufen, dagegen keine solche Gerade, die ganz im Inneren des Polygons verläuft.

Satz 8. Jede Ebene α trennt die übrigen Punkte des Raumes in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des andern Gebietes eine Strecke AB, innerhalb derer ein Punkt von α liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte von A und A' eines und desselben Gebietes stets eine Strecke AA', die keinen Punkt von α enthält.

Erklärung, Indem wir die Bezeichnungen dieses Satzes 8 benutzen, sagen wir: die Punkte A, A' liegen im Raume *auf ein und derselben Seite von der Ebene* α und die Punkte A, B liegen im Raume *auf verschiedenen Seiten von der Ebene* α.

Der Satz 8 bringt die wichtigsten Tatsachen betreffs der Anordnung der Elemente im Raume zum Ausdruck; diese Tatsachen sind daher lediglich Folgerungen aus den bisher behandelten Axiomen und es bedurfte in der Gruppe II keines neuen räumlichen Axioms.

§ 5.

Die Axiomgruppe III: Axiome der Kongruenz.

Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Kongruenz und damit auch den der Bewegung.

Erklärung. Die Strecken stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Beschreibung uns die Worte „*kongruent*" oder „*gleich*" dienen.

III. 1. *Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen:*

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets:

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad AB \equiv BA.$$

Wir sagen auch kürzer: eine jede Strecke kann auf einer gegebenen Seite einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte in eindeutig bestimmter Weise *abgetragen* werden.

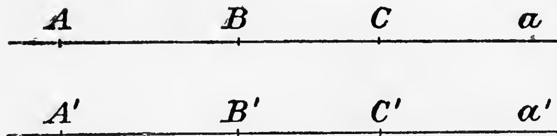
III. 2. *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent, d. h. wenn*

$$AB \equiv A'B' \quad \textit{und} \quad AB \equiv A''B'',$$

so ist auch

$$A'B' \equiv A''B''.$$

III. 3. *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf der-*



selben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \quad \textit{und} \quad BC \equiv B'C'$$

ist, so ist auch stets

$$AC \equiv A'C'.$$

Erklärung. Es sei α eine beliebige Ebene und h, k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkte O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder mit $\sphericalangle(k, h)$. Aus den Axiomen II 1—4 kann leicht geschlossen werden, daß die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkte O die übrigen Punkte der Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit teilen: Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so gibt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O, noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h, k hindurchläuft. Eines dieser beiden Gebiete ist vor dem anderen ausgezeichnet, indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heiße das *Innere* des Winkels (h, k) zum Unterschiede von dem anderen Gebiete, welches das *Äußere* des Winkels (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heißen *Schenkel* des Winkels und der Punkt O heißt der *Scheitel* des Winkels.

Erklärung. Die Winkel stehen in gewissen Beziehungen zueinander, zu deren Bezeichnung uns ebenfalls die Worte „*kongruent*“ oder „*gleich*“ dienen.

III. 4. *Es sei ein Winkel* $\sphericalangle(h, k)$ *in einer Ebene* α *und eine Gerade* a' *in einer Ebene* α', *sowie eine bestimmte Seite von* a' *auf* α' *gegeben. Es bedeute* h' *einen Halbstrahl der Geraden* a', *der vom Punkte* O' *ausgeht: dann gibt es in der Ebene* α' *einen und nur einen Halbstrahl* k', *so daß der Winkel* (h, k) *kongruent oder gleich dem Winkel* (h', k') *ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels* (h', k') *auf der gegebenen Seite von* a' *liegen, in Zeichen:*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k) \quad \textit{und} \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h).$$

Wir sagen auch kurz: ein jeder Winkel kann in einer gegebenen Ebene nach einer gegebenen Seite an einen gegebenen Halbstrahl auf eine eindeutig bestimmte Weise *abgetragen* werden.

III. 5. *Wenn ein Winkel* (h, k) *sowohl dem Winkel* (h', k') *als auch dem Winkel* (h'', k'') *kongruent ist, so ist auch der Winkel* (h', k') *dem Winkel* (h'', k'') *kongruent, d. h. wenn*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k') \quad \textit{und} \quad \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$$

ist, so ist auch stets

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'').$$

Erklärung. Es sei ein Dreieck ABC vorgelegt; wir bezeichnen die beiden von A ausgehenden durch B und C laufenden Halbstrahlen mit h und k. Der Winkel (h, k) heißt dann der von den Seiten AB und AC eingeschlossene oder der der Seite BC gegenüberliegende Winkel des Dreieckes ABC; er enthält in seinem Inneren sämtliche innere Punkte des Dreieckes ABC und wird mit $\sphericalangle BAC$ oder $\sphericalangle A$ bezeichnet.

III. 6. *Wenn für zwei Dreiecke* ABC *und* $A'B'C'$ *die Kongruenzen*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so sind auch stets die Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \textit{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt.

Die Axiome III 1—3 enthalten nur Aussagen über die Kongruenz von Strecken; sie mögen daher die *linearen* Axiome der Gruppe III heißen. Die Axiome III 4, 5 enthalten Aussagen über die Kongruenz von Winkeln. Das Axiom III 6 knüpft das Band zwischen den Begriffen der Kongruenz von Strecken und von Winkeln. Die Axiome III 4—6 enthalten Aussagen über die Elemente der ebenen Geometrie und mögen daher die *ebenen* Axiome der Gruppe III heißen.

§ 6.

Folgerungen aus den Axiomen der Kongruenz.

Erklärung. Es sei die Strecke AB kongruent der Strecke $A'B'$. Da nach Axiom III 1 auch die Strecke AB kongruent AB ist, so ist nach Axiom III 2 auch $A'B'$ kongruent AB; wir sagen: die beiden Strecken AB und $A'B'$ sind *untereinander kongruent.*

Erklärung. Sind $A, B, C, D, \ldots, K, L$ auf a und $A', B', C', D', \ldots, K', L'$ auf a' zwei Reihen von Punkten, so daß die sämtlichen entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C', \ldots$, KL und $K'L'$ bez. einander kongruent sind, so heißen die beiden Reihen von Punkten *untereinander kongruent;* A und A', B und $B', \ldots, L$ und L' heißen die *entsprechenden Punkte* der kongruenten Punktreihen.

Aus den linearen Axiomen III 1—3 schließen wir leicht folgende Sätze:

Satz 9. Ist von zwei kongruenten Punktreihen $A, B, \ldots, K, L$ und $A', B', \ldots, K', L'$ die erste so geordnet, daß B zwischen A einerseits und $C, D, \ldots, K, L$ andererseits, C zwischen A, B einerseits und $D, \ldots, K, L$ andererseits, u. s. w. liegt, so sind die Punkte $A', B', \ldots, K', L'$ auf die gleiche Weise geordnet, d. h. B' liegt zwischen A' einerseits und $C', D', \ldots, K', L'$ andererseits, C' zwischen A', B' einerseits und $D', \ldots, K', L'$ andererseits u. s. w.

Erklärung. Es sei Winkel (h, k) kongruent dem Winkel (h', k'). Da nach Axiom III 4 der Winkel (h, k) kongruent $\sphericalangle(h, k)$ ist, so folgt aus Axiom III 5, daß $\sphericalangle(h', k')$ kongruent $\sphericalangle(h, k)$ ist; wir sagen: die beiden Winkel (h, k) und (h', k') sind *untereinander kongruent.*

Erklärung. Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und deren nicht gemeinsame Schenkel eine gerade Linie bilden, heißen *Nebenwinkel.* Zwei Winkel mit gemeinsamem Scheitel, deren Schenkel je eine Gerade bilden, heißen *Scheitelwinkel.* Ein Winkel, welcher einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, heißt ein *rechter Winkel.*

Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen einander *kongruent,* wenn sämtliche Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$
$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

erfüllt sind.

Satz 10 (Erster Kongruenzsatz für Dreiecke). Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

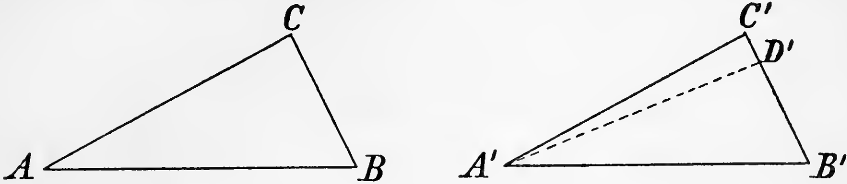
$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

gelten, so sind die beiden Dreiecke einander kongruent.

Beweis. Nach Axiom III 6 sind die Kongruenzen

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \quad \text{und} \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

erfüllt und es bedarf somit nur des Nachweises, daß die Seiten BC und $B'C'$ einander kongruent sind. Nehmen wir nun im Gegenteil an, es wäre etwa BC nicht kongruent $B'C'$, und bestimmen auf $B'C'$ den



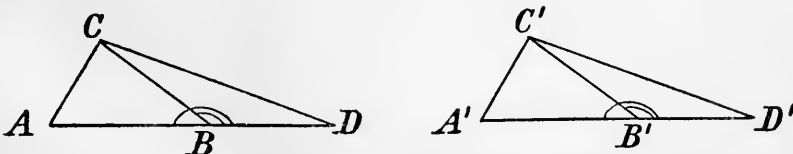
Punkt D', so daß $BC \equiv B'D'$ wird, so stimmen die beiden Dreiecke ABC und $A'B'D'$ in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein; nach Axiom III 6 sind mithin insbesondere die beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'D'$ einander kongruent. Nach Axiom III 5 müßten mithin auch die beiden Winkel $\sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle B'A'D'$ einander kongruent ausfallen; dies ist nicht möglich, da nach Axiom III 4 ein jeder Winkel an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann. Damit ist der Beweis für Satz 10 vollständig erbracht.

Ebenso leicht beweisen wir die weitere Tatsache:

Satz 11 (Zweiter Kongruenzsatz für Dreiecke). Wenn in zwei Dreiecken je eine Seite und die beiden anliegenden Winkel kongruent ausfallen, so sind die Dreiecke stets kongruent.

Wir sind nunmehr im stande, die folgenden wichtigen Tatsachen zu beweisen:

Satz 12. *Wenn zwei Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle A'B'C'$ einander kongruent sind, so sind auch ihre Nebenwinkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'B'D'$ einander kongruent.*



Beweis. Wir wählen die Punkte A', C', D' auf den durch B' gehenden Schenkel derart, daß

$$A'B' \equiv AB, \quad C'B' \equiv CB, \quad D'B' \equiv DB$$

wird. In den beiden Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sind dann die

* In view of Satz 12 it is not necessary that l should be within the angle (h k).

Seiten AB und CB bez. den Seiten $A'B'$ und $C'B'$ kongruent und, da überdies die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel nach Voraussetzung kongruent sein sollen, so folgt nach Satz 10 die Kongruenz jener Dreiecke, d. h. es gelten die Kongruenzen

$$AC \equiv A'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle BAC \quad \text{und} \quad \sphericalangle B'A'C'.$$

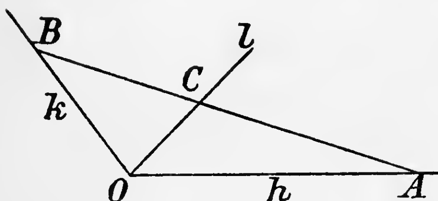
Da andererseits nach Axiom III 3 die Strecken AD und $A'D'$ einander kongruent sind, so folgt wiederum aus Satz 10 die Kongruenz der Dreiecke CAD und $C'A'D'$, d. h. es gelten die Kongruenzen

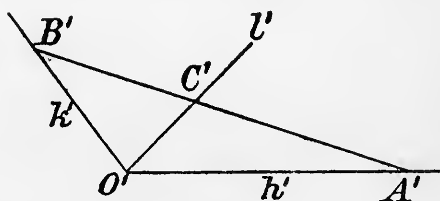
$$CD \equiv C'D' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle A'D'C'$$

und hieraus folgt mittels Betrachtung der Dreiecke BCD und $B'C'D'$ nach Axiom III 6 die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle C'B'D'$.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 12 ist der Satz von der Kongruenz der Scheitelwinkel.

Satz 13. Es sei der Winkel (h, k) in der Ebene α dem Winkel (h', k') in der Ebene α' kongruent und ferner sei l ein Halbstrahl der Ebene α, der vom Scheitel des Winkels (h, k) ausgeht und im *Inneren dieses Winkels verläuft: dann gibt es stets einen Halbstrahl l' in der Ebene α', der vom





Scheitel des Winkels (h', k') ausgeht, und im Inneren dieses Winkels (h', k') verläuft, so daß

$$\sphericalangle (h, l) \equiv \sphericalangle (h', l') \quad \text{und} \quad \sphericalangle (k, l) \equiv \sphericalangle (k', l')$$

wird.

Beweis. Wir bezeichnen die Scheitel der Winkel (h, k) und (h', k') bez. mit O, O' und bestimmen dann auf den Schenkeln h, k, h', k' die Punkte A, B, A', B' derart, daß die Kongruenzen

$$OA \equiv O'A' \quad \text{und} \quad OB \equiv O'B'$$

erfüllt sind. Wegen der Kongruenz der Dreiecke OAB und $O'A'B'$ wird

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle O'A'B', \quad \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle O'B'A'.$$

Die Gerade AB schneide l in C; bestimmen wir dann auf der Strecke $A'B'$ den Punkt C', so daß $A'C' \equiv AC$ wird, so ist $O'C'$ der gesuchte Halbstrahl l'. In der Tat, aus $AC \equiv A'C'$ und $AB \equiv A'B'$ kann mittels

Axiom III 3 leicht die Kongruenz $BC \equiv B'C'$ geschlossen werden; nunmehr erweisen sich die Dreiecke OAC und $O'A'C'$, sowie ferner die Dreiecke OBC und $O'B'C'$ untereinander kongruent; hieraus ergeben sich die Behauptungen des Satzes 13.

Auf ähnliche Art gelangen wir zu folgender Tatsache:

Satz 14. Es seien einerseits h, k, l und andererseits h', k', l' je drei von einem Punkte ausgehende und je in einer Ebene gelegene Halbstrahlen: wenn dann die Kongruenzen

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \quad \text{und} \quad \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l')$$

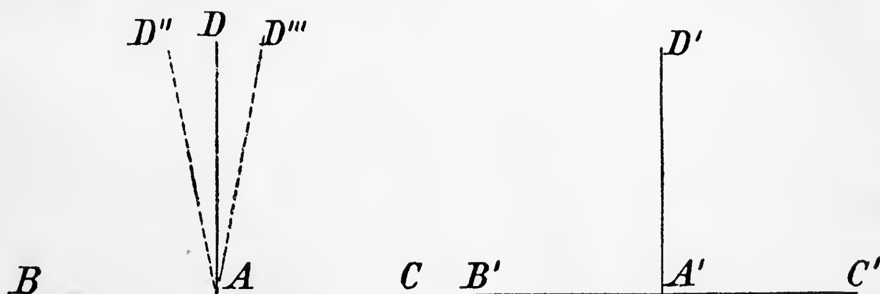
erfüllt sind, so ist stets auch

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Auf Grund der Sätze 12 und 13 gelingt der Nachweis des folgenden einfachen Satzes, den *Euklid* — meiner Meinung nach mit Unrecht — unter die Axiome gestellt hat:

Satz 15. *Alle rechten Winkel sind einander kongruent.*

Beweis. Der Winkel BAD sei seinem Nebenwinkel CAD kongruent und desgleichen sei der Winkel $B'A'D'$ seinem Nebenwinkel $C'A'D'$ kongruent; es sind dann $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle B'A'D'$, $\sphericalangle C'A'D'$ sämtlich rechte Winkel. Wir nehmen im Gegensatz zu unserer Behauptung an, es wäre der rechte Winkel $B'A'D'$ nicht kongruent dem rechten



Winkel BAD, und tragen dann $\sphericalangle B'A'D'$ an den Halbstrahl AB an, so daß der entstehende Schenkel AD'' entweder in das Innere des Winkels BAD oder des Winkels CAD fällt; es treffe etwa die erstere Möglichkeit zu. Wegen der Kongruenz der Winkel $B'A'D'$ und BAD'' folgt nach Satz 12, daß auch der Winkel $C'A'D'$ dem Winkel CAD'' kongruent ist, und da die Winkel $B'A'D'$ und $C'A'D'$ einander kongruent sein sollen, so lehrt Axiom IV 5, daß auch der Winkel BAD'' dem Winkel CAD'' kongruent sein muß. Da ferner $\sphericalangle BAD$ kongruent $\sphericalangle CAD$ ist, so können wir nach Satz 13 innerhalb des Winkels CAD einen von A ausgehenden Halbstrahl AD''' finden, so daß $\sphericalangle BAD''$ kon-

gruent $\sphericalangle CAD'''$ und zugleich $\sphericalangle DAD''$ kongruent $\sphericalangle DAD'''$ wird. Nun war aber $\sphericalangle BAD''$ kongruent $\sphericalangle CAD''$ und somit müßte nach Axiom III 5 auch $\sphericalangle CAD''$ kongruent CAD''' sein; das ist nicht möglich, weil nach Axiom III 4 ein jeder Winkel an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite in einer Ebene nur auf eine Weise abgetragen werden kann; hiermit ist der Beweis für Satz 15 erbracht.

Wir können jetzt die Bezeichnungen „*spitzer Winkel*" und „*stumpfer Winkel*" in bekannter Weise einführen.

Der Satz von der Kongruenz der Basiswinkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ im gleichschenkligen Dreieck ABC folgt unmittelbar durch Anwendung des Axioms III 6 auf Dreieck ABC und Dreieck BAC. Mit Hilfe dieses Satzes und unter Hinzuziehung des Satzes 14 beweisen wir dann leicht in bekannter Weise die folgende Tatsache:

Satz 16 (Dritter Kongruenzsatz für Dreiecke). Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten entsprechend kongruent ausfallen, so sind die Dreiecke kongruent.

Erklärung. Irgend eine endliche Anzahl von Punkten heißt eine *Figur;* liegen alle Punkte der Figur in einer Ebene, so heißt sie eine *ebene Figur.*

Zwei Figuren heißen *kongruent,* wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, daß die auf diese Weise einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich einander kongruent sind.

Kongruente Figuren haben, wie man aus den Sätzen 12 und 9 erkennt, folgende Eigenschaften: Drei Punkte einer Geraden liegen auch in jeder kongruenten Figur auf einer Geraden. Die Anordnung der Punkte in entsprechenden Ebenen in Bezug auf entsprechende Gerade ist in kongruenten Figuren die nämliche; das gleiche gilt von der Reihenfolge entsprechender Punkte in entsprechenden Geraden.

Der allgemeinste Kongruenzsatz für die Ebene und für den Raum drückt sich wie folgt aus:

Satz 17. Wenn $(A, B, C, \ldots)$ und $(A', B', C', \ldots)$ kongruente ebene Figuren sind und P einen Punkt in der Ebene der ersten bedeutet, so läßt sich in der Ebene der zweiten Figur stets ein Punkt P' finden derart, daß $(A, B, C, \ldots, P)$ und $(A', B', C', \ldots, P')$ wieder kongruente Figuren sind. Enthält die Figur $(A, B, C, \ldots)$ wenigstens drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte, so ist die Konstruktion von P' nur auf eine Weise möglich.

Satz 18. Wenn $(A, B, C, \ldots)$ und $(A', B', C', \ldots)$ kongruente Figuren sind und P einen beliebigen Punkt bedeutet, so läßt sich stets ein Punkt P' finden, so daß die Figuren $(A, B, C, \ldots, P)$ und

$(A', B', C', \ldots, P')$ kongruent sind. Enthält die Figur $(A, B, C, \ldots)$ mindestens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte, so ist die Konstruktion von P' nur auf eine Weise möglich.

Der Satz 18 spricht das wichtige Resultat aus, daß die sämtlichen räumlichen Tatsachen der Kongruenz und mithin der Bewegung im Raume — unter Hinzuziehung der Axiomgruppen I und II — Folgerungen aus den sechs oben aufgestellten linearen und ebenen Axiomen der Kongruenz sind.

§ 7.

Die Axiomgruppe IV: Axiom der Parallelen.

Aus den bisherigen Axiomen folgt in bekannter Weise der Euklidische Satz, daß der Außenwinkel eines Dreieckes stets größer ist, als jeder der beiden inneren Winkel.

Es sei nun α eine beliebige Ebene, a eine beliebige Gerade in α und A ein Punkt in α und außerhalb a. Ziehen wir dann in α eine Gerade c, die durch A geht und a schneidet, und sodann in α eine Gerade b durch A, so daß die Gerade c die Geraden a, b unter gleichen Gegenwinkeln schneidet, so folgt leicht aus dem erwähnten Satze vom Außenwinkel, daß die Geraden a, b keinen Punkt miteinander gemein haben, d. h. in einer Ebene α läßt sich durch einen Punkt A außer einer Geraden a stets eine Gerade ziehen, welche jene Gerade a nicht schneidet.

Das Parallelenaxiom lautet nun:

IV (Euklidisches Axiom). *Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene α nur eine Gerade b, die durch A läuft und a nicht schneidet; dieselbe heißt die Parallele zu a durch A.*

Das Parallelenaxiom IV ist gleichbedeutend mit der folgenden Forderung:

Wenn zwei Geraden a, b in einer Ebene eine dritte Gerade c derselben Ebene nicht treffen, so treffen sie sich auch einander nicht.

In der Tat, hätten a, b einen Punkt A gemein, so würden durch A in derselben Ebene die beiden Geraden a, b möglich sein, die c nicht treffen; dieser Umstand widerspräche dem Parallelenaxiom IV. Ebenso leicht folgt umgekehrt das Parallelenaxiom IV aus der genannten Forderung.

Das Parallelenaxiom IV ist ein *ebenes Axiom.*

Die Einführung des Parallelenaxioms vereinfacht die Grundlagen und erleichtert den Aufbau der Geometrie in erheblichem Maße.

Nehmen wir nämlich zu den Kongruenzaxiomen das Parallelenaxiom hinzu, so gelangen wir leicht zu den bekannten Tatsachen:

Satz 19. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel und Wechselwinkel kongruent,

und umgekehrt: die Kongruenz der Gegen- und Wechselwinkel hat zur Folge, daß die Geraden parallel sind.

Satz 20. Die Winkel eines Dreiecks machen zusammen zwei Rechte aus[1]).

Erklärung. Wenn M ein beliebiger Punkt in einer Ebene α ist, so heißt die Gesamtheit aller Punkte A, für welche die Strecken MA einander kongruent sind, ein *Kreis;* M heißt der *Mittelpunkt des Kreises.*

Auf Grund dieser Erklärung folgen mit Hilfe der Axiomgruppen III—IV leicht die bekannten Sätze über den Kreis, insbesondere die Möglichkeit der Konstruktion eines Kreises durch irgend drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte sowie der Satz über die Kongruenz aller Peripheriewinkel über der nämlichen Sehne und der Satz von den Winkeln im Kreisviereck.

§ 8.

Die Axiomgruppe V: Axiome der Stetigkeit.

V 1 (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom). *Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots,$ so daß A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u. s. w. liegt und überdies die Strecken*

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$$

$A \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \qquad A_{n-1}\; B\; A_n$

einander gleich sind: dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4 \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, daß B zwischen A und A_n liegt.

V 2 (Axiom der Vollständigkeit). *Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist,* d. h.: zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome I—IV, V 1 erfüllt sind.

Das Archimedische Axiom V 1 ist ein *lineares* Axiom.

---

1) Betreffs der Frage, inwieweit dieser Satz umgekehrt das Parallelenaxiom zu ersetzen vermag, vergleiche man die Bemerkungen am Schluß von Kap. II § 12.

Hinsichtlich des Axioms der Vollständigkeit V 2 füge ich hier folgende Bemerkungen hinzu.

Die Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome, von der in diesem Axiom die Rede ist, hat man so zu verstehen, daß nach der Erweiterung sämtliche früheren Axiome in der früheren Weise gültig bleiben sollen, d. h. sofern man die vorhandenen Beziehungen der Elemente, nämlich die vorhandene Anordnung und Kongruenz der Strecken und Winkel nirgends stört, also z. B. ein Punkt, der vor der Erweiterung zwischen zwei Punkten liegt, dies auch nach der Erweiterung tut, Strecken und Winkel, die vorher einander kongruent sind, dies auch nach der Erweiterung bleiben.

Die Erfüllbarkeit des Vollständigkeitsaxioms ist wesentlich durch die Voranstellung des Archimedischen Axioms bedingt; in der Tat läßt sich zeigen, daß zu einem System von Punkten, Geraden und Ebenen, welche die Axiome I—IV erfüllen, stets noch auf mannigfache Weise solche Elemente hinzugefügt werden können, daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome I—IV ebenfalls sämtlich gültig sind; d. h. das Vollständigkeitsaxiom würde einen Widerspruch einschließen, wenn man den Axiomen I—IV nicht noch das Archimedische Axiom hinzufügt.

Das Vollständigkeitsaxiom ist nicht eine Folge des Archimedischen Axioms. In der Tat reicht das Archimedische Axiom allein nicht aus, um mit Benutzung der Axiome I—IV unsere Geometrie als identisch mit der gewöhnlichen analytischen „Cartesischen" Geometrie nachzuweisen (vgl. § 9 und § 12). Dagegen gelingt es unter Hinzunahme des Vollständigkeitsaxioms — obwohl dieses Axiom unmittelbar keine Aussage über den Begriff der Konvergenz enthält —, die Existenz der einem Dedekindschen Schnitte entsprechenden Grenze und den Bolzanoschen Satz vom Vorhandensein der Verdichtungsstellen nachzuweisen, womit dann unsere Geometrie sich als identisch mit der Cartesischen Geometrie erweist.

Durch die vorstehende Betrachtungsweise ist die Forderung der Stetigkeit in zwei wesentlich verschiedene Bestandteile zerlegt worden, nämlich in das Archimedische Axiom, dem zugleich die Rolle zukommt, die Forderung der Stetigkeit vorzubereiten, und in das Vollständigkeitsaxiom, das den Schlußstein des ganzen Axiomensystems bildet[1]).

In den nachfolgenden Untersuchungen stützen wir uns wesentlich nur auf das Archimedische Axiom und setzen im allgemeinen das Vollständigkeitsaxiom nicht voraus.

---

1) Man vergleiche auch die Bemerkungen am Schluß von § 17 sowie meinen Vortrag über den Zahlbegriff: Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900. — Bei der Untersuchung des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleich-

Kapitel II.

Die Widerspruchslosigkeit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome.

§ 9.

Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

Die Axiome der fünf in Kapitel I aufgestellten Axiomgruppen stehen miteinander nicht in Widerspruch, d. h. es ist nicht möglich, durch logische Schlüsse aus denselben eine Tatsache abzuleiten, welche einem der aufgestellten Axiome widerspricht. Um dies einzusehen, genügt es, eine Geometrie anzugeben, in der sämtliche Axiome der fünf Gruppen erfüllt sind.

Man betrachte zunächst den Bereich Ω aller derjenigen algebraischen Zahlen, welche hervorgehen, indem man von der Zahl 1 ausgeht und eine endliche Anzahl von Malen die vier Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die fünfte Operation $|\sqrt{1+\omega^2}|$ anwendet, wobei ω jedesmal eine Zahl bedeuten kann, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist.

Wir denken uns ein Paar von Zahlen (x, y) des Bereiches Ω als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u : v : w)$ aus Ω, falls u, v nicht beide Null sind, als eine Gerade; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

ausdrücken, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden $(u : v : w)$ liegt; damit sind, wie man leicht sieht, die Axiome I 1—3 und IV erfüllt. Die Zahlen des Bereiches Ω sind sämtlich reell; indem wir berücksichtigen, daß dieselben sich ihrer Größe nach anordnen lassen, können wir leicht solche Festsetzungen für unsere Punkte und Geraden treffen, daß auch die Axiome II der Anordnung sämtlich gültig sind. In der Tat, sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... irgend welche Punkte auf einer Geraden, so möge dies ihre Reihenfolge auf der Geraden sein, wenn die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder $y_1, y_2, y_3 \ldots$ in dieser Reihenfolge entweder beständig abnehmen oder wachsen; um ferner die Forderung des Axioms II 4 zu erfüllen, haben wir nur nötig festzusetzen, daß alle Punkte (x, y), für die $ux + vy + w$ kleiner oder größer als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen

schenkligen Dreieck bin ich auf ein weiteres Stetigkeitsaxiom geführt worden, das ich Axiom der Nachbarschaft genannt habe; man sehe meine im Anhang abgedruckte Abhandlung „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck“. Proceedings of the London Mathematical Society XXXV 1903. Vgl. S. 92 und S. 107.

Seite der Geraden $(u:v:w)$ gelegen sein sollen. Man überzeugt sich leicht, daß diese Festsetzung sich mit der vorigen Festsetzung in Übereinstimmung befindet, derzufolge ja die Reihenfolge der Punkte auf einer Geraden bereits bestimmt ist.

Das Abtragen von Strecken und Winkeln erfolgt nach den bekannten Methoden der analytischen Geometrie. Eine Transformation von der Gestalt

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b$$

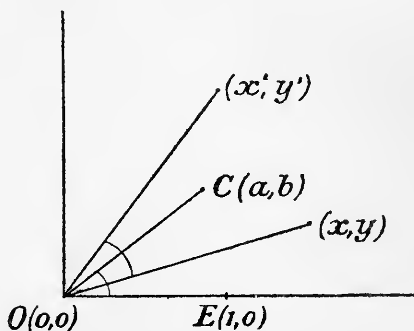
vermittelt die Parallelverschiebung von Strecken und Winkeln. Wird ferner der Punkt $(0, 0)$ mit O, der Punkt $(1, 0)$ mit E und ein beliebiger Punkt (a, b) mit C bezeichnet, so entsteht durch Drehung um den Winkel $\sphericalangle\, COE$, wenn O der feste Drehpunkt ist, aus dem beliebigen Punkte (x, y) der Punkt (x', y'), wobei

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$
$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

zu setzen ist. Da die Zahl

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

wiederum dem Bereiche Ω angehört, so gelten bei unseren Festsetzungen auch die Kongruenzaxiome III und offenbar ist auch das Archimedische Axiom V 1 erfüllt. Das Axiom der Vollständigkeit V 2 ist nicht erfüllt.



Jeder Widerspruch in den Folgerungen aus unseren geometrischen Axiomen I—IV, V 1 müßte demnach auch in der Arithmetik des Bereiches Ω erkennbar sein[1]).

Wählen wir in der obigen Entwicklung statt des Bereiches Ω den Bereich aller reellen Zahlen, so erhalten wir eine Geometrie, in der sämtliche Axiome I—V gültig sind; diese Geometrie ist die gewöhnliche Cartesische Geometrie.

Jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den Axiomen I—V müßte demnach in der Arithmetik des Systems der reellen Zahlen erkennbar sein.

1) Betreffs der Frage nach der Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome vergleiche man meine Vorträge über den Zahlbegriff: Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900, sowie Mathematische Probleme, gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongreß 1900, Göttinger Nachr. 1900, insbesondere Problem No. 2.

Die entsprechende Betrachtungsweise für die räumliche Geometrie bietet keine Schwierigkeit.

Wie man erkennt, gibt es unendlich viele Geometrien, die den Axiomen I—IV, V 1 genügen, dagegen nur eine, nämlich die Cartesische Geometrie, in der auch zugleich das Vollständigkeitsaxiom V 2 gültig ist.

§ 10.

Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms (Nicht-Euklidische Geometrie).

Nachdem wir die Widerspruchslosigkeit der Axiome erkannt haben, ist es von Interesse, zu untersuchen, ob sie sämtlich voneinander unabhängig sind. In der Tat zeigt sich, daß keine wesentlichen Bestandteile der genannten Axiomgruppen durch logische Schlüsse aus den jedesmal voranstehenden Axiomgruppen abgeleitet werden können.

Was zunächst die einzelnen Axiome der Gruppen I, II und III betrifft, so ist der Nachweis dafür leicht zu führen, daß die Axiome ein und derselben Gruppe je unter sich unabhängig sind.

Die Axiome der Gruppen I und II liegen bei unserer Darstellung den übrigen Axiomen zu Grunde, so daß es sich nur noch darum handelt, für jede der Gruppen III, IV und V die Unabhängigkeit von den übrigen nachzuweisen.

Das Parallelenaxiom IV ist von den übrigen Axiomen unabhängig; dies zeigt man in bekannter Weise am einfachsten, wie folgt. Man wähle die Punkte, Geraden und Ebenen der gewöhnlichen in § 9 konstruierten (Cartesischen) Geometrie, soweit sie innerhalb einer festen Kugel verlaufen, für sich allein als Elemente einer räumlichen Geometrie und vermittle die Kongruenzen dieser Geometrie durch solche lineare Transformationen der gewöhnlichen Geometrie, welche die feste Kugel in sich überführen. Bei geeigneten Festsetzungen erkennt man, daß in dieser *„Nicht-Euklidischen" Geometrie* sämtliche Axiome außer dem Euklidischen Axiom IV gültig sind, und da die Möglichkeit der gewöhnlichen Geometrie in § 9 nachgewiesen worden ist, so folgt nunmehr auch die Möglichkeit der Nicht-Euklidischen Geometrie.

§ 11.

Die Unabhängigkeit der Kongruenzaxiome.

Wir werden die Unabhängigkeit der Kongruenzaxiome erkennen, indem wir den Nachweis führen, daß das Axiom III 6 oder, was auf das nämliche hinausläuft, der erste Kongruenzsatz für Dreiecke, d. i. Satz 10 durch logische Schlüsse nicht aus den übrigen Axiomen I, II, III 1—5, IV, V abgeleitet werden kann.

Wir wählen die Punkte, Geraden, Ebenen der gewöhnlichen Geometrie auch als Elemente der neuen räumlichen Geometrie und definieren das Abtragen der Winkel ebenfalls wie in der gewöhnlichen Geometrie, etwa in der Weise, wie in § 9 auseinandergesetzt worden ist; dagegen definieren wir das Abtragen der Strecken auf andere Art. Die zwei Punkte A_1, A_2 mögen in der gewöhnlichen Geometrie die Koordinaten x_1, y_1, z_1 bez. x_2, y_2, z_2 haben; dann bezeichnen wir den positiven Wert von

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

als die Länge der Strecke $A_1 A_2$, und nun sollen zwei beliebige Strecken $A_1 A_2$ und $A_1' A_2'$ einander kongruent heißen, wenn sie im eben festgesetzten Sinne gleiche Längen haben.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß in der so hergestellten räumlichen Geometrie die Axiome I, II, III 1—2, 4—5, IV, V gültig sind.

Um zu zeigen, daß auch das Axiom III 3 erfüllt ist, wählen wir eine beliebige Gerade a und auf ihr drei Punkte A_1, A_2, A_3, so daß A_2 zwischen A_1 und A_3 liegt. Die Punkte x, y, z der Geraden a seien durch die Gleichungen

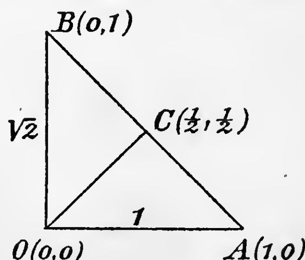
$$x = \lambda t + \lambda',$$
$$y = \mu t + \mu',$$
$$z = \nu t + \nu'$$

gegeben, worin $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ gewisse Konstante und t einen Parameter bedeutet. Sind $t_1, t_2 (< t_1), t_3 (< t_2)$ die Parameterwerte, die den Punkten A_1, A_2, A_3 entsprechen, so finden wir für die Längen der drei Strecken $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ und $A_1 A_3$ bez. die Ausdrücke:

$$(t_1 - t_2) \left| \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2} \right|,$$
$$(t_2 - t_3) \left| \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2} \right|,$$
$$(t_1 - t_3) \left| \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2} \right|,$$

und mithin ist die Summe der Längen der Strecken $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ gleich der Länge der Strecke $A_1 A_2$; dieser Umstand bedingt die Gültigkeit des Axioms III 3.

Das Axiom III 6 oder vielmehr der erste Kongruenzsatz für Dreiecke ist in unserer Geometrie nicht immer erfüllt. Betrachten wir nämlich z. B. in der Ebene $z = 0$ die vier Punkte



O mit den Koordinaten $x = 0$, $y = 0$,
A „ „ „ $x = 1$, $y = 0$,
B „ „ „ $x = 0$, $y = 1$,
C „ „ „ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$,

so sind in den beiden (rechtwinkligen) Dreiecken OAC und OBC die Winkel bei C und

die anliegenden Seiten entsprechend kongruent, da die Seite OC beiden Dreiecken gemeinsam ist und die Strecken AC und BC die gleiche Länge $\frac{1}{2}$ besitzen. Dagegen haben die dritten Seiten OA und OB die Länge 1, bez. $\sqrt{2}$ und sind daher nicht einander kongruent.

Es ist auch nicht schwer, in dieser Geometrie zwei Dreiecke zu finden, für welche das Axiom III 6 selbst nicht erfüllt ist.

§ 12.
Die Unabhängigkeit der Stetigkeitsaxiome V (Nicht-Archimedische Geometrie).

Um die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms V 1 zu beweisen, müssen wir eine Geometrie herstellen, in der sämtliche Axiome mit Ausnahme der Axiome V, diese letzteren aber nicht erfüllt sind[1]).

Zu dem Zwecke konstruieren wir den Bereich $\Omega(t)$ aller derjenigen algebraischen Funktionen von t, welche aus t durch die fünf Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und durch die Operation $|\sqrt{1+\omega^2}|$ hervorgehen; dabei soll ω irgend eine Funktion bedeuten, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist. Die Menge der Elemente von $\Omega(t)$ ist — ebenso wie von Ω in § 9 — eine abzählbare. Die fünf Operationen sind sämtlich eindeutig und reell ausführbar; der Bereich $\Omega(t)$ enthält daher nur eindeutige und reelle Funktionen von t.

Es sei c irgend eine Funktion des Bereiches $\Omega(t)$; da die Funktion c eine algebraische Funktion von t ist, so kann sie jedenfalls nur für eine endliche Anzahl von Werten t verschwinden und es wird daher die Funktion c für genügend große positive Werte von t entweder stets positiv oder stets negativ ausfallen.

Wir sehen jetzt die Funktionen des Bereiches $\Omega(t)$ als eine Art komplexer Zahlen an; offenbar sind in dem so definierten komplexen Zahlensystem die gewöhnlichen Rechnungsregeln sämtlich gültig. Ferner möge, wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen dieses komplexen Zahlensystems sind, die Zahl a größer oder kleiner als b, in Zeichen: $a > b$ oder $a < b$, heißen, je nachdem die Differenz $c = a - b$ als Funktion von t für genügend große positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt. Bei dieser Festsetzung ist für die Zahlen unseres komplexen Zahlensystems eine Anordnung ihrer Größe nach möglich, die derjenigen bei reellen Zahlen analog ist; auch gelten, wie man leicht erkennt, für unsere komplexen Zahlen die Sätze, wonach Ungleichungen

1) *G. Veronese* hat in seinem tiefsinnigen Werke: Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894, ebenfalls den Versuch gemacht, eine Geometrie aufzubauen, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist.

richtig bleiben, wenn man auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder beide Seiten mit der gleichen Zahl > 0 multipliziert.

Bedeutet n eine beliebige positive ganze rationale Zahl, so gilt für die beiden Zahlen n und t des Bereiches $\Omega(t)$ gewiß die Ungleichung $n < t$, da die Differenz $n - t$, als Funktion von t betrachtet, für genügend große positive Werte von t offenbar stets negativ ausfällt. Wir sprechen diese Tatsache in folgender Weise aus: Die beiden Zahlen 1 und t des Bereiches $\Omega(t)$, die beide > 0 sind, besitzen die Eigenschaft, daß ein beliebiges Vielfaches der ersteren stets kleiner als die letztere Zahl bleibt.

Wir bauen nun aus den komplexen Zahlen des Bereiches $\Omega(t)$ eine Geometrie genau auf dieselbe Art auf, wie dies in § 9 unter Zugrundelegung des Bereiches Ω von algebraischen Zahlen geschehen ist: wir denken uns ein System von drei Zahlen (x, y, z) des Bereiches $\Omega(t)$ als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend vier Zahlen $(u : v : w : r)$ aus $\Omega(t)$, falls u, v, w nicht sämtlich Null sind, als eine Ebene; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

ausdrücken, daß der Punkt (x, y, z) in der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt, und die Gerade sei die Gesamtheit aller in zwei Ebenen mit verschiedenen $u : v : w$ gelegenen Punkte. Treffen wir sodann die entsprechenden Festsetzungen über die Anordnung der Elemente und über das Abtragen von Strecken und Winkeln, wie in § 9, so entsteht eine *„Nicht-Archimedische" Geometrie,* in welcher, wie die zuvor erörterten Eigenschaften des komplexen Zahlensystems $\Omega(t)$ zeigen, sämtliche Axiome mit Ausnahme der Stetigkeitsaxiome erfüllt sind. In der Tat können wir die Strecke 1 auf der Strecke t beliebig oft hintereinander abtragen, ohne daß der Endpunkt der Strecke t überschritten wird; dies widerspricht der Forderung des Archimedischen Axioms.

Daß auch das Vollständigkeitsaxiom V 2 von allen voranstehenden Axiomen I—IV, V 1 unabhängig ist, zeigt die erste in § 9 aufgestellte Geometrie, da in dieser das Archimedische Axiom erfüllt ist.

Auch die Nicht-Archimedischen und zugleich Nicht-Euklidischen Geometrien sind von prinzipieller Bedeutung und insbesondere erschien mir die Frage nach der Winkelsumme im Dreiecke und nach der Abhängigkeit dieser Sätze vom Archimedischen Axiom von hohem Interesse. Die Untersuchung, die *M. Dehn*[1]) auf meine Anregung hin über diesen Gegenstand unternommen hat, führte zu einer vollen Aufklärung dieser Frage. Den Untersuchungen von M. Dehn liegen die Axiome I—III zu Grunde. Nur zum Schlusse der Dehnschen Arbeit — damit auch die

1) Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Math. Ann. Bd. 53. 1900.

Riemannsche (elliptische) Geometrie in den Bereich der Untersuchung hineinfällt — sind die Axiome II der Anordnung allgemeiner, als in der gegenwärtigen Abhandlung, nämlich etwa wie folgt zu fassen:

Vier Punkte A, B, C, D einer Geraden zerfallen stets in zwei Paare A, C und B, D, so daß A, C durch B, D getrennt sind und umgekehrt. Fünf Punkte auf einer Geraden können immer in der Weise mit A, B, C, D, E bezeichnet werden, daß A, C durch B, D und durch B, E, ferner daß A, D durch B, E und durch C, E u. s. f. getrennt sind.

Die hauptsächlichsten von M. Dehn auf Grund der Axiome I—III, also ohne Benutzung der Stetigkeit, bewiesenen Sätze sind folgende:

Wenn in irgend *einem* Dreieck die Summe der Winkel größer bezüglich gleich oder kleiner als zwei Rechte ist, so ist sie es in jedem Dreieck[1]).

Aus der Annahme unendlich vieler Parallelen zu einer Geraden durch einen Punkt folgt, wenn man das Archimedische Axiom ausschließt, *nicht*, daß die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist. Es gibt vielmehr sowohl eine Geometrie (die Nicht-Legendresche Geometrie), in der man durch einen Punkt zu einer Geraden unendlich viele Parallelen ziehen kann und in der trotzdem die Sätze der Riemannschen (elliptischen) Geometrie gültig sind. Andererseits gibt es eine Geometrie (die Semi-Euklidische Geometrie), in welcher es unendlich viele Parallelen durch einen Punkt zu einer Geraden gibt und in der dennoch die Sätze der Euklidischen Geometrie gelten.

Aus der Annahme, daß es keine Parallelen gibt, folgt stets, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte ist.

Ich bemerke endlich, daß, wenn man das Archimedische Axiom hinzunimmt, das Parallelenaxiom durch die Forderung ersetzt werden kann, es solle die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten sein.

Kapitel III.

Die Lehre von den Proportionen.

§ 13.

Komplexe Zahlensysteme[2]).

Am Anfang dieses Kapitels wollen wir einige kurze Auseinandersetzungen über komplexe Zahlensysteme vorausschicken, die uns später insbesondere zur Erleichterung der Darstellung nützlich sein werden.

1) Einen Beweis für diesen Satz hat später auch *F. Schur* erbracht, Math. Ann. Bd. 55.

2) Vgl. meinen Vortrag: Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8. 1900.

Die reellen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit ein System von Dingen mit folgenden Eigenschaften:

Sätze der Verknüpfung (1—6):

1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch „Addition“ eine bestimmte Zahl c, in Zeichen

$$a + b = c \quad \text{oder} \quad c = a + b.$$

2. Wenn a und b gegebene Zahlen sind, so existiert stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so daß

$$a + x = b \quad \text{bez.} \quad y + a = b$$

wird.

3. Es gibt eine bestimmte Zahl — sie heiße 0 —, so daß für jedes a zugleich

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad 0 + a = a$$

ist.

4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art durch „Multiplikation“ eine bestimmte Zahl c, in Zeichen

$$ab = c \quad \text{oder} \quad c = ab.$$

5. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind und a nicht 0 ist, so existiert stets eine und nur eine Zahl x und auch eine und nur eine Zahl y, so daß

$$ax = b \quad \text{bez.} \quad ya = b$$

wird.

6. Es gibt eine bestimmte Zahl — sie heiße 1 —, so daß für jedes a zugleich

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

ist.

Regeln der Rechnung (7—12):

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Rechnungsgesetze:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$

8. $a + b = b + a$

9. $a(bc) = (ab)c$

10. $a(b + c) = ab + ac$

11. $(a + b)c = ac + bc$

12. $ab = ba.$

Sätze der Anordnung (13—16):

13. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte von ihnen (etwa a) größer ($>$) als die andere; die letztere heißt dann die kleinere, in Zeichen:

$$a > b \quad \text{und} \quad b < a.$$

14. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.

15. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets

$$a + c > b + c \quad \text{und} \quad c + a > c + b.$$

16. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist, so ist auch stets

$$ac > bc \quad \text{und} \quad ca > cb.$$

Sätze von der Stetigkeit (17—18):

17. (Archimedischer Satz.) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addieren, daß die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + \cdots + a > b.$$

18. (Satz von der Vollständigkeit.) Es ist nicht möglich, dem System der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Sätze 1—17 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher aufgeführten Sätze keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Ein System von Dingen, das nur einen Teil der Eigenschaften 1—18 besitzt, heiße ein *komplexes Zahlensystem*. Ein komplexes Zahlensystem heiße ein *Archimedisches* oder ein *Nicht-Archimedisches*, jenachdem dasselbe der Forderung 17 genügt oder nicht.

Von den aufgestellten Eigenschaften 1—18 sind einige Folgen der übrigen. Es entsteht die Aufgabe, die logische Abhängigkeit dieser Eigenschaften zu untersuchen[1]. Wir werden im Kapitel VI § 32 und § 33 zwei bestimmte Fragen der angedeuteten Art wegen ihrer geometrischen Bedeutung beantworten und wollen hier nur darauf hinweisen, daß jedenfalls die Forderung 17 keine logische Folge der voranstehenden Eigenschaften ist, da ja beispielsweise das in § 12 betrachtete komplexe Zahlensystem $\Omega(t)$ sämtliche Eigenschaften 1—16 besitzt, aber nicht die Forderung 17 erfüllt.

Im übrigen gelten betreffs der Sätze von der Stetigkeit (17—18) die entsprechenden Bemerkungen, wie sie in § 8 über die geometrischen Axiome der Stetigkeit gemacht worden sind.

§ 14.

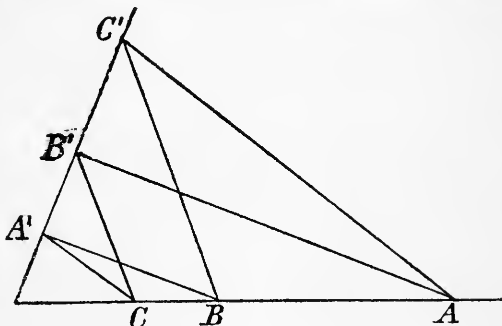
Beweis des Pascalschen Satzes.

In diesem und dem folgenden Kapitel legen wir unserer Untersuchung die ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme der Stetigkeits-

1) Vgl. meinen bereits citierten Vortrag über den Zahlbegriff.

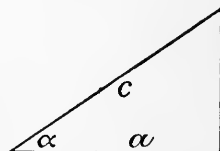
axiome, d. h. die Axiome I 1—3 und II—IV zu Grunde. In dem gegenwärtigen Kapitel III gedenken wir Euklids Lehre von den Proportionen mittels der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig vom Archimedischen Axiom* zu begründen.

Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst eine Tatsache, die ein besonderer Fall des bekannten Pascalschen Satzes aus der Lehre von den Kegelschnitten ist und die ich künftig kurz als den Pascalschen Satz bezeichnen will. Dieser Satz lautet:



Satz 21[1]) (Pascalscher Satz). *Es seien A, B, C bez. A', B', C' je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden, die vom Schnittpunkte der Geraden verschieden sind; ist dann CB' parallel BC' und CA' parallel AC', so ist auch BA' parallel AB'.*

Um den Beweis für diesen Satz zu erbringen, führen wir zunächst folgende Bezeichnungsweise ein. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist offenbar die Kathete a durch die Hypotenuse c und den von a und c eingeschlossenen Basiswinkel α eindeutig bestimmt: wir setzen kurz



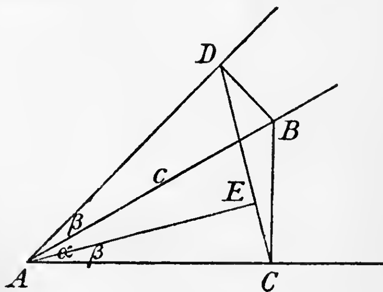
$$a = \alpha c,$$

so daß das Symbol αc stets eine bestimmte Strecke bedeutet, sobald c eine beliebig gegebene Strecke und α ein beliebig gegebener spitzer Winkel ist.

Nunmehr möge c eine beliebige Strecke und α, β mögen zwei beliebige spitze Winkel bedeuten; wir behaupten, daß allemal die Streckenkongruenz

$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c$$

besteht und somit die Symbole α, β stets miteinander vertauschbar sind.



Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir die Strecke $c = AB$ und tragen an diese Strecke in A zu beiden Seiten die Winkel α bez. β an. Dann fällen wir von B aus auf die anderen

1) *F. Schur* hat einen interessanten Beweis des Pascalschen Satzes auf Grund der ebenen und räumlichen Axiome I—III in den Math. Ann. Bd. 51 veröffentlicht.

Schenkel dieser Winkel die Lote BC und BD, verbinden C mit D und fällen schließlich von A aus das Lot AE auf CD.

Da die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ Rechte sind, so liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise und demnach sind die beiden Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle ABD$ als Peripheriewinkel auf derselben Sehne AD einander kongruent. Nun ist einerseits $\sphericalangle ACD$ zusammen mit dem $\sphericalangle CAE$ und andererseits $\sphericalangle ABD$ zusammen mit $\sphericalangle BAD$ je ein Rechter und folglich sind auch die Winkel $\sphericalangle CAE$ und $\sphericalangle BAD$ einander kongruent, d. h. es ist

$$\sphericalangle CAE \equiv \beta$$

und daher

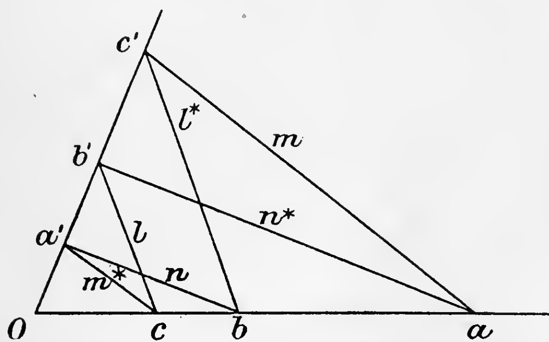
$$\sphericalangle DAE \equiv \alpha .$$

Wir gewinnen nun unmittelbar die Streckenkongruenzen

$$\begin{array}{c|c} \beta c \equiv AD & \alpha c \equiv AC \\ \alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE & \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE, \end{array}$$

und hieraus folgt die Richtigkeit der vorhin behaupteten Kongruenz.

Wir kehren nun zur Figur des Pascalschen Satzes zurück und bezeichnen den Schnittpunkt der beiden Geraden mit O und die Strecken OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', AC', CA', BA', AB' bez. mit $a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*$. Sodann fällen wir von O Lote auf l, m^*, n; das Lot auf l schließe mit den beiden Geraden OA, OA' die spitzen Winkel λ', λ ein und die Lote auf m bez. n mögen mit den Geraden OA und OA' die spitzen Winkel μ', μ bez. ν', ν bilden. Drücken wir nun diese drei Lote in der vorhin angegebenen Weise mit Hilfe der Hypotenusen und Basiswinkel in den betreffenden rechtwinkligen Dreiecken auf doppelte Weise aus, so erhalten wir folgende drei Streckenkongruenzen



(1) $$\lambda b' \equiv \lambda' c,$$

(2) $$\mu a' \equiv \mu' c,$$

(3) $$\nu a' \equiv \nu' b.$$

Da nach Voraussetzung l parallel l^* und m parallel m^* sein soll, so stimmen die von O auf l^* bez. m zu fällenden Lote mit den Loten auf l bez. m^* überein und wir erhalten somit

(4) $$\lambda c' \equiv \lambda' b,$$
(5) $$\mu c' \equiv \mu' a.$$

Wenn wir auf die Kongruenz (3) links und rechts das Symbol $\lambda'\mu$ anwenden und bedenken, daß nach dem vorhin Bewiesenen die in Rede stehenden Symbole miteinander vertauschbar sind, so finden wir

$$\nu\lambda'\mu a' \equiv \nu'\mu\lambda' b.$$

In dieser Kongruenz berücksichtigen wir links die Kongruenz (2) und rechts (4); dann wird

$$\nu\lambda'\mu' c \equiv \nu'\mu\lambda c'$$

oder

$$\nu\mu'\lambda' c \equiv \nu'\lambda\mu c'.$$

Hierin berücksichtigen wir links die Kongruenz (1) und rechts (5); dann wird

$$\nu\mu'\lambda b' \equiv \nu'\lambda\mu' a$$

oder

$$\lambda\mu'\nu b' \equiv \lambda\mu'\nu' a.$$

Wegen der Bedeutung unserer Symbole schließen wir aus der letzten Kongruenz sofort

$$\mu'\nu b' \equiv \mu'\nu' a$$

und hieraus

(6) $$\nu b' \equiv \nu' a.$$

Fassen wir nun das von O auf n gefällte Lot ins Auge und fällen auf dasselbe Lote von A und B' aus, so zeigt die Kongruenz (6), daß die Fußpunkte der letzteren beiden Lote zusammenfallen, d. h. die Gerade $n^* = AB'$ steht zu dem Lote auf n senkrecht und ist mithin zu n parallel. Damit ist der Beweis für den Pascalschen Satz erbracht.

Wir benutzen im folgenden zur Begründung der Geometrie lediglich denjenigen speziellen Fall des Pascalschen Satzes, in dem die Streckenkongruenz

$$OC \equiv OA'$$

und folglich auch

$$OA \equiv OC'$$

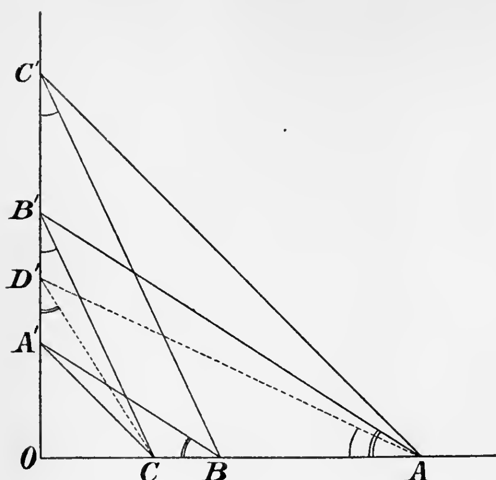
gilt. In diesem speziellen Fall gelingt der Beweis besonders einfach, nämlich folgendermaßen (Figur S. 30):

Wir tragen auf OA' von O aus die Strecke OB bis D' ab, so daß die Verbindungsgerade BD' parallel zu CA' und AC' wird. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $OC'B$ und OAD' wird

(1†) $$\sphericalangle OC'B \equiv \sphericalangle OAD'.$$

Da CB' und BC' nach Voraussetzung einander parallel sind, so ist

(2†) $$\sphericalangle OC'B \equiv \sphericalangle OBC;$$



aus (1†) und (2†) folgern wir

$$\sphericalangle\, OAD' \equiv \sphericalangle\, OB'C;$$

dann aber ist nach der Lehre vom Kreise $ACD'B'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach einem bekannten Satze von den Winkeln im Kreisviereck die Kongruenz

(3†) $\sphericalangle\, OD'C \equiv \sphericalangle\, OAB'$.

Andererseits ist wegen der Kongruenz der Dreiecke $OD'C$ und OBA' auch

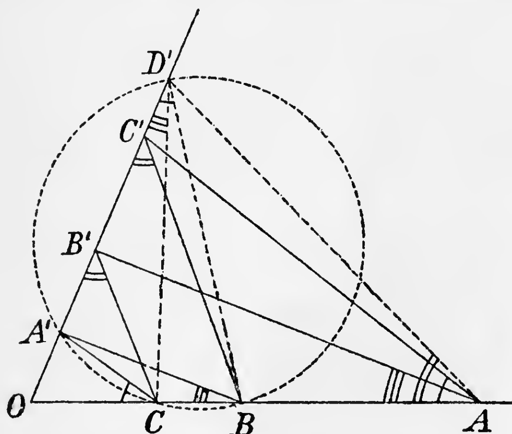
(4†) $\sphericalangle\, OD'C \equiv \sphericalangle\, OBA'$;

aus (3†) und (4†) folgern wir

$$\sphericalangle\, OAB' \equiv \sphericalangle\, OBA'$$

und diese Kongruenz lehrt, daß AB' und BA' einander parallel sind, wie es der Pascalsche Satz verlangt.

Wenn irgend eine Gerade, ein Punkt außerhalb derselben und irgend ein Winkel gegeben ist, so kann man offenbar durch Abtragen dieses Winkels und Ziehen einer Parallelen eine Gerade finden, die durch den gegebenen Punkt geht und die gegebene Gerade unter dem gegebenen Winkel schneidet. Im Hinblick auf diesen Umstand dürfen wir endlich zum Beweise des allgemeineren Pascalschen Satzes auch das folgende einfache Schlußverfahren anwenden, das ich einer Mitteilung von anderer Seite verdanke.



Man ziehe durch B eine Gerade, die OA' im Punkte D' unter dem Winkel OCA' trifft, so daß die Kongruenz

(1*) $\sphericalangle\, OCA' \equiv \sphericalangle\, OD'B$

gilt; dann ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre vom Kreise $CBD'A'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach dem Satze von der Kongruenz der Peripheriewinkel auf der nämlichen Seite die Kongruenz

(2*) $$\sphericalangle\, OBA' \equiv \sphericalangle\, OD'C.$$

Da CA' und AC' nach Voraussetzung einander parallel sind, so ist

(3*) $$\sphericalangle\, OCA' \equiv \sphericalangle\, OAC';$$

aus (1*) und (3*) folgern wir die Kongruenz

$$\sphericalangle\, OD'B \equiv \sphericalangle\, OAC';$$

dann aber ist auch $BAD'C'$ ein Kreisviereck und mithin gilt nach dem Satze von den Winkeln im Kreisviereck die Kongruenz

(4*) $$\sphericalangle\, OAD' \equiv \sphericalangle\, OC'B.$$

Da ferner nach Voraussetzung CB' parallel BC' ist, so haben wir auch

(5*) $$\sphericalangle\, OB'C \equiv \sphericalangle\, OC'B;$$

aus (4*) und (5*) folgern wir die Kongruenz

$$\sphericalangle\, OAD' \equiv \sphericalangle\, OB'C;$$

diese endlich lehrt, daß $CAD'B'$ ein Kreisviereck ist, und mithin gilt auch die Kongruenz

(6*) $$\sphericalangle\, OAB' \equiv \sphericalangle\, OD'C.$$

Aus (2*) und (6*) folgt

$$\sphericalangle\, OBA' \equiv \sphericalangle\, OAB'$$

und diese Kongruenz lehrt, daß BA' und AB' einander parallel sind, wie es der Pascalsche Satz verlangt.

Fällt D' mit einem der Punkte A', B', C' zusammen, so wird eine Abänderung dieses Schlußverfahrens notwendig, die leicht ersichtlich ist[1]).

§ 15.

Die Streckenrechnung auf Grund des Pascalschen Satzes.

Der im vorigen Paragraph bewiesene Pascalsche Satz setzt uns in den Stand, in die Geometrie eine Rechnung mit Strecken einzuführen, in der die Rechnungsregeln für reelle Zahlen sämtlich unverändert gültig sind.

Statt des Wortes „kongruent" und des Zeichens $\equiv$ bedienen wir uns in der Streckenrechnung des Wortes „gleich" und des Zeichens $=$.

Wenn A, B, C drei Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so bezeichnen wir $c = AC$ als die *Summe* der beiden Strecken $a = AB$ und $b = BC$ und setzen

a b
c = a + b

$$c = a + b.$$

1) Interesse verdient auch die Verwendung, die der Satz vom gemeinsamen Schnittpunkt der Höhen eines Dreieckes zur Begründung des Pascalschen Satzes bez. der Proportionenlehre findet; man vergleiche hierüber F. Schur, Math. Ann. Bd. 57 und J. Mollerup, Studier over den plane geometrics aksiomer, Kopenhagen 1903.

Die Strecken a und b heißen kleiner als c, in Zeichen:

$$a < c, \quad b < c,$$

und c heißt größer als a und b, in Zeichen:

$$c > a, \quad c > b.$$

Aus den linearen Kongruenzaxiomen III 1—3 entnehmen wir leicht, daß für die eben definierte Addition der Strecken das assoziative Gesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

sowie das kommutative Gesetz

$$a + b = b + a$$

gültig ist.

Um das Produkt einer Strecke a in eine Strecke b geometrisch zu definieren, bedienen wir uns folgender Konstruktion. Wir wählen zunächst eine beliebige Strecke, die für die ganze Betrachtung die nämliche bleibt, und bezeichnen dieselbe mit 1. Nunmehr tragen wir auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels vom Scheitel O aus die Strecke 1 und ferner ebenfalls vom Scheitel O die Strecke b ab; sodann tragen wir auf dem anderen Schenkel die Strecke a ab. Wir verbinden die Endpunkte der Strecken 1 und a durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Endpunkt der Strecke b eine Parallele; dieselbe möge auf dem anderen Schenkel eine Strecke c abschneiden: dann nennen wir diese Strecke c das *Produkt* der Strecke a in die Strecke b und bezeichnen sie mit

$$c = ab.$$

Wir wollen vor allem beweisen, daß für die eben definierte Multiplikation der Strecken das kommutative Gesetz

$$ab = ba$$

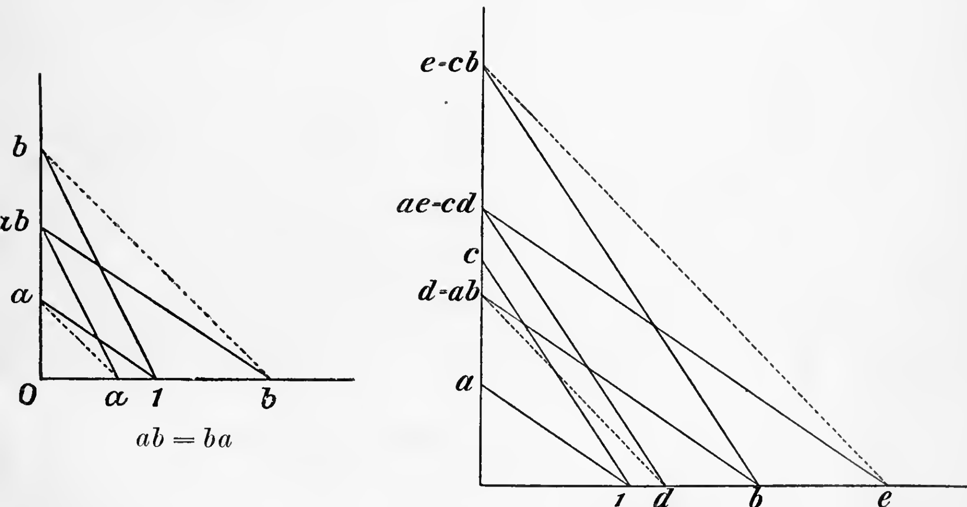
gültig ist. Zu dem Zwecke konstruieren wir zuerst auf die oben festgesetzte Weise die Strecke ab. Ferner tragen wir auf dem ersten Schenkel des rechten Winkels die Strecke a und auf dem anderen Schenkel die Strecke b ab, verbinden den Endpunkt der Strecke 1 mit dem Endpunkt von b auf dem anderen Schenkel durch eine Gerade und ziehen zu dieser Geraden durch den Endpunkt von a auf dem ersten Schenkel eine Parallele: dieselbe schneidet auf dem anderen Schenkel die Strecke ba ab;

in der Tat fällt diese Strecke ba, wie untenstehende Figur zeigt, wegen der Parallelität der punktierten Hilfslinien nach dem Pascalschen Satze (Satz 21) mit der vorhin konstruierten Strecke ab zusammen. Auch umgekehrt folgt, wie man sofort sieht, aus der Gültigkeit des kommutativen Gesetzes in unserer Streckenrechnung der Pascalsche Satz.

Um für unsere Multiplikation der Strecken das assoziative Gesetz

$$a(bc) = (ab)c$$

zu beweisen, tragen wir auf dem einen Schenkel des rechten Winkels vom Scheitel O aus die Strecken 1 und b und auf dem anderen Schenkel ebenfalls von O aus die Strecken a und c ab. Sodann konstruieren wir



die Strecken $d = ab$ und $e = cb$ und tragen diese Strecken d und e auf dem ersteren Schenkel von O aus ab. Konstruieren wir sodann ae und cd, so ist wiederum auf Grund des Pascalschen Satzes aus vorstehender Figur ersichtlich, daß die Endpunkte dieser Strecken zusammenfallen, d. h. es ist

$$ae = cd \quad \text{oder} \quad a(cb) = c(ab)$$

und hieraus folgt mit Zuhilfenahme des kommutativen Gesetzes auch

$$a(bc) = (ab)c\ ^{1}).$$

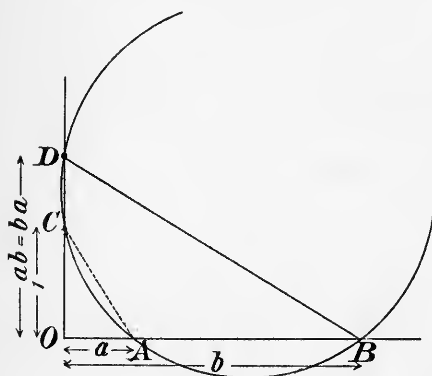
---

1) Man vergleiche hierzu auch die Methoden zur Begründung der Proportionenlehre, die neuerdings von *A. Kneser*, Archiv für Math. und Phys., R. III, Bd. 2, und *J. Mollerup*, Math. Ann., Bd. 56 sowie Studier over den plane geometrics aksiomer, Kopenhagen 1903, angegeben worden sind und bei denen die Proportionengleichung vorangestellt wird. *F. Schur*, Zur Proportionenlehre, Math. Ann. Bd. 57 bemerkt, daß bereits *Kupffer* (Sitzungsber. der Naturforscherges. zu Dorpat 1893) das kommutative Gesetz der Multiplikation richtig bewiesen hat. Jedoch ist *Kupffers* weitere Begründung der Proportionenlehre als unzureichend anzusehen.

Wie man sieht, haben wir im vorstehenden beim Nachweise sowohl des kommutativen wie des assoziativen Gesetzes der Multiplikation lediglich denjenigen speziellen Fall des Pascalschen Satzes benutzt, dessen Beweis auf S. 29—30 (§ 14) in besonders einfacher Weise durch einmalige Anwendung des Kreisvierecksatzes gelang.

Durch eine geringe Umordnung des obigen Schlußverfahrens erhält man folgende ebenfalls sehr kurze Begründung der Multiplikationsgesetze der Streckenrechnung.

Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels trage man vom Scheitel O aus die Strecken $a = OA$ und $b = OB$ und außerdem auf dem anderen Schenkel die Einheitsstrecke $1 = OC$ ab. Der durch A, B, C gelegte Kreis schneide den letzteren Schenkel noch im Punkte D. Der Punkt D wird leicht in elementarer Weise gewonnen, indem man vom Mittelpunkt des Kreises das Lot auf OC fällt und an diesem den Punkt C spiegelt. Die Strecke OD heiße das Produkt der beiden Strecken a und b; es gilt dann offenbar das kommutative Gesetz der Multiplikation



$$ab = ba.$$

Wegen der Gleichheit der Winkel OCA und OBD stimmt diese Definition des Produktes mit der auf S. 32 angegebenen überein. Die Gleichung

$$ab = ba$$

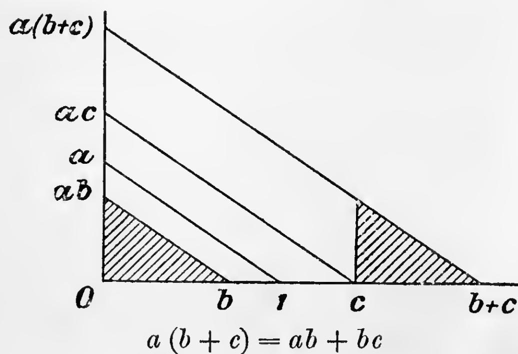
beweist nunmehr nach S. 33 oben den speziellen Fall (S. 29) des Pascalschen Satzes und aus diesem wiederum folgt nach S. 33 das assoziative Gesetz der Multiplikation

$$a(bc) = (ab)c.$$

Endlich gilt in unserer Streckenrechnung auch das distributive Gesetz

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Um dasselbe zu beweisen, konstruieren wir die Strecken ab, ac und $a(b + c)$ und ziehen dann durch den Endpunkt der Strecke c (s. nebenstehende Figur) eine Parallele



$a(b + c) = ab + bc$

zu dem anderen Schenkel des rechten Winkels. Die Kongruenz der beiden rechtwinkligen in der Figur schraffierten Dreiecke und die Anwendung des Satzes von der Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm liefert dann den gewünschten Nachweis.

Sind b und c zwei beliebige Strecken, so gibt es stets eine Strecke a, sodaß $c = ab$ wird; diese Strecke a wird mit $\frac{c}{b}$ bezeichnet und der *Quotient* von c durch b genannt.

§ 16.

Die Proportionen und die Ähnlichkeitssätze.

Mit Hilfe der eben dargelegten Streckenrechnung läßt sich *Euklids* Lehre von den Proportionen einwandsfrei und ohne Archimedisches Axiom in folgender Weise begründen.

Erklärung. Sind a, b, a', b' irgend vier Strecken, so soll die *Proportion*

$$a : b = a' : b'$$

nichts anderes bedeuten als die Streckengleichung

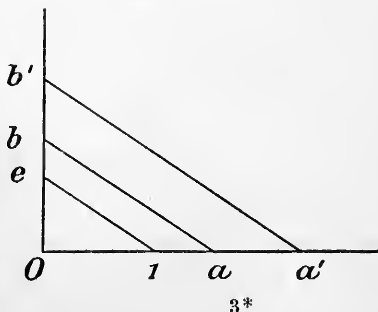
$$ab' = ba'.$$

Erklärung. Zwei Dreiecke heißen *ähnlich,* wenn entsprechende Winkel in ihnen kongruent sind.

Satz 22. Wenn a, b und a', b' entsprechende Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken sind, so gilt die Proportion

$$a : b = a' : b'.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, wo die von a, b und a', b' eingeschlossenen Winkel in beiden Dreiecken Rechte sind, und denken uns die beiden Dreiecke in ein und denselben rechten Winkel eingetragen. Wir tragen sodann vom Scheitel aus auf einem Schenkel die Strecke 1 ab und ziehen durch den Endpunkt dieser Strecke 1 die Parallele zu den beiden Hypotenusen; dieselbe schneide auf dem anderen Schenkel die Strecke e ab; dann ist nach unserer Definition des Streckenproduktes



$$b = ea, \quad b' = ea';$$

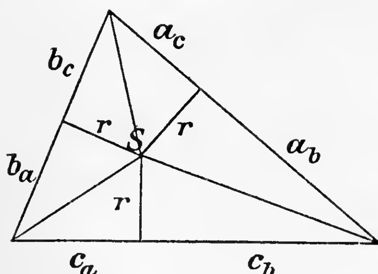
mithin haben wir

$$ab' = ba'$$

d. h.

$$a : b = a' : b'.$$

Nunmehr kehren wir zu dem allgemeinen Falle zurück. Wir konstruieren in jedem der beiden ähnlichen Dreiecke den Schnittpunkt S bez. S' der drei Winkelhalbierenden, dessen Existenz aus dem Satze vom gleichschenkligen Dreiecke leicht abzuleiten ist, und fällen von diesen die drei Lote r bez. r' auf die Dreiecksseiten; die auf diesen entstehenden Abschnitte bezeichnen wir mit



$$a_b, a_c, b_c, b_a, c_a, c_b$$

bez.

$$a_b', a_c', b_c', b_a', c_a', c_b'.$$

Der vorhin bewiesene spezielle Fall unseres Satzes liefert dann die Proportionen

$$a_b : r = a_b' : r' \qquad b_c : r = b_c' : r'$$
$$a_c : r = a_c' : r' \qquad b_a : r = b_a' : r';$$

aus diesen schließen wir mittels des distributiven Gesetzes

$$a : r = a' : r', \quad b : r = b' : r'$$

und folglich mit Rücksicht auf das kommutative Gesetz der Multiplikation

$$a : b = a' : b'.$$

Aus dem eben bewiesenen Satze 22 entnehmen wir leicht den Fundamentalsatz in der Lehre von den Proportionen, der wie folgt lautet:

Satz 23. *Schneiden zwei Parallele auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels die Strecken a, b bez. a', b' ab, so gilt die Proportion*

$$a : b = a' : b'.$$

Umgekehrt, wenn vier Strecken a, b, a', b' diese Proportion erfüllen und a, a' und b, b' je auf einem Schenkel eines beliebigen Winkels abgetragen werden, so sind die Verbindungsgeraden der Endpunkte von a, b bez. von a', b' einander parallel.

§ 17.

Die Gleichungen der Geraden und Ebenen.

Zu dem bisherigen System von Strecken fügen wir noch ein zweites ebensolches System von Strecken hinzu; die Strecken des neuen Systems denken wir uns durch ein Merkzeichen kenntlich gemacht und nennen

sie dann „*negative*“ Strecken zum Unterschiede von den bisher betrachteten „*positiven*“ Strecken. Führen wir noch die durch einen einzigen Punkt bestimmte Strecke 0 ein, so gelten bei gehörigen Festsetzungen in dieser erweiterten Streckenrechnung sämtliche Rechnungsregeln für reelle Zahlen, die in § 13 zusammengestellt worden sind. Wir heben folgende spezielle Tatsachen hervor:

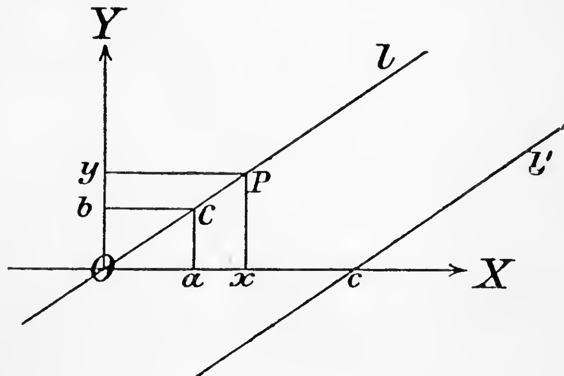
Es ist stets $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Wenn $ab = 0$, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

Wenn $a > b$ und $c > 0$, so folgt stets $ac > bc$.

Wir nehmen nun in einer Ebene α durch einen Punkt O zwei zueinander senkrechte Gerade als festes rechtwinkliges Achsenkreuz an und tragen dann die beliebigen Strecken x, y von O aus auf den beiden Geraden ab, und zwar nach der einen oder nach der anderen Seite hin, je nachdem die abzutragende Strecke x bez. y positiv oder negativ ist; sodann errichten wir die Lote in den Endpunkten der Strecken x, y und bestimmen den Schnittpunkt P dieser Lote: die Strecken x, y heißen die *Koordinaten* des Punktes P; jeder Punkt der Ebene α ist durch seine Koordinaten x, y, die positive oder negative Strecken oder 0 sein können, eindeutig bestimmt.

Es sei l irgend eine Gerade in der Ebene α, die durch O und durch einen Punkt C mit den Koordinaten a, b gehe. Sind dann x, y die Koordinaten irgend eines Punktes von l, so finden wir leicht aus Satz 22



$$a : b = x : y$$

oder

$$bx - ay = 0$$

als die Gleichung der Geraden l. Ist l' eine zu l parallele Gerade, die auf der x-Achse die Strecke c abschneidet, so gelangen wir zu der Gleichung der Geraden l', indem wir in der Gleichung der Geraden l die Strecke x durch die Strecke $x - c$ ersetzen; die gewünschte Gleichung lautet also

$$bx - ay - bc = 0.$$

Aus diesen Entwicklungen schließen wir leicht auf eine Weise, die von dem Archimedischen Axiom unabhängig ist, daß jede Gerade in einer Ebene durch eine lineare Gleichung in den Koordinaten x, y dargestellt

wird und umgekehrt jede solche lineare Gleichung eine Gerade darstellt, wobei die Koeffizienten derselben in der betreffenden Geometrie vorkommende Strecken sind.

Die entsprechenden Resultate beweist man ebenso leicht in der räumlichen Geometrie.

Der weitere Aufbau der Geometrie kann von nun an nach den Methoden geschehen, die man in der analytischen Geometrie gemeinhin anwendet.

Wir haben bisher in diesem Kapitel III das Archimedische Axiom nirgends benutzt; setzen wir jetzt die Gültigkeit desselben voraus, so können wir den Punkten einer beliebigen Geraden im Raume reelle Zahlen zuordnen und zwar auf folgende Art.

Wir wählen auf der Geraden zwei beliebige Punkte aus und ordnen diesen die Zahlen 0 und 1 zu; sodann halbieren wir die durch sie bestimmte Strecke 01 und bezeichnen den entstehenden Mittelpunkt mit $\frac{1}{2}$, ferner den Mittelpunkt der Strecke $0\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{4}$ u. s. w.; nach n-maliger Ausführung dieses Verfahrens gelangen wir zu einem Punkte, dem die Zahl $\frac{1}{2^n}$ zuzuordnen ist. Nun tragen wir die Strecke $0\frac{1}{2^n}$ an den Punkt 0 sowohl nach der Seite des Punktes 1 als auch nach der anderen Seite hin etwa m mal hintereinander ab und erteilen den so entstehenden Punkten die Zahlenwerte $\frac{m}{2^n}$ bezw. $-\frac{m}{2^n}$. Aus dem Archimedischen Axiom kann leicht geschlossen werden, daß auf Grund dieser Zuordnung sich jedem beliebigen Punkte der Geraden in eindeutig bestimmter Weise eine reelle Zahl zuordnen läßt und zwar so, daß dieser Zuordnung folgende Eigenschaft zukommt: wenn A, B, C irgend drei Punkte der Geraden und bez. α, β, γ die zugehörigen reellen Zahlen sind und B zwischen A und C liegt, so erfüllen diese Zahlen stets entweder die Ungleichung $\alpha < \beta < \gamma$ oder $\alpha > \beta > \gamma$.

Aus den Entwicklungen im Kap. II § 9 leuchtet ein, daß dort für jede Zahl, die dem algebraischen Zahlkörper Ω angehört, notwendig ein Punkt der Geraden existieren muß, dem sie zugeordnet ist. Ob auch jeder anderen reellen Zahl ein Punkt entspricht, hängt davon ab, ob in der vorgelegten Geometrie das Vollständigkeitsaxiom V 2 gilt oder nicht gilt.

Dagegen ist es, auch wenn man nur die Gültigkeit des Archimedischen Axioms annimmt, stets möglich, das System von Punkten, Geraden und Ebenen so durch „irrationale" Elemente zu erweitern, daß auf jeder Geraden der entstehenden Geometrie jedem System von drei reellen Zahlen ohne Ausnahme ein Punkt zugeordnet ist. Durch gehörige Festsetzung kann zugleich erreicht werden, daß in der erweiterten Geometrie

sämtliche Axiome I—V gültig sind. Diese (durch Hinzufügung der irrationalen Elemente) erweiterte Geometrie ist keine andere als die gewöhnliche analytische Cartesische Geometrie des Raumes, in welcher auch das Vollständigkeitsaxiom V 2 gilt[1]).

Kapitel IV.

Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene.

§ 18.

Die Zerlegungsgleichheit und Inhaltsgleichheit von Polygonen.

Wir legen den Untersuchungen des gegenwärtigen Kapitels IV dieselben Axiome wie im Kapitel III zu Grunde, nämlich die linearen und ebenen Axiome sämtlicher Gruppen mit Ausnahme der Stetigkeitsaxiome, d. h. die Axiome I 1—3 und II—IV.

Die im Kapitel III erörterte Lehre von den Proportionen und die daselbst eingeführte Streckenrechnung setzt uns in den Stand, die Euklidische Lehre von den Flächeninhalten mittels der genannten Axiome, d. h. *in der Ebene und unabhängig von den Stetigkeitsaxiomen* zu begründen.

Da nach den Entwicklungen im Kapitel III die Lehre von den Proportionen wesentlich auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht so gilt dies auch für die Lehre von den Flächeninhalten; diese Begründung der Lehre von den Flächeninhalten erscheint mir als eine der merkwürdigsten Anwendungen des Pascalschen Satzes in der Elementargeometrie.

Erklärung: Verbindet man zwei Punkte eines Polygons P durch irgend einen Streckenzug, der ganz im Innern des Polygons verläuft, so entstehen zwei neue Polygone P_1 und P_2, deren innere Punkte alle im Innern von P liegen; wir sagen: P zerfällt in P_1 und P_2, oder P_1 und P_2 setzen P zusammen.

Erklärung. Zwei Polygone heißen *zerlegungsgleich*, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander kongruent sind.

Erklärung. Zwei Polygone heißen *inhaltsgleich* oder *von gleichem Inhalte*, wenn es möglich ist, zu denselben zerlegungsgleiche Polygone

---

1) Vgl. die Bemerkungen am Schluß von § 8.

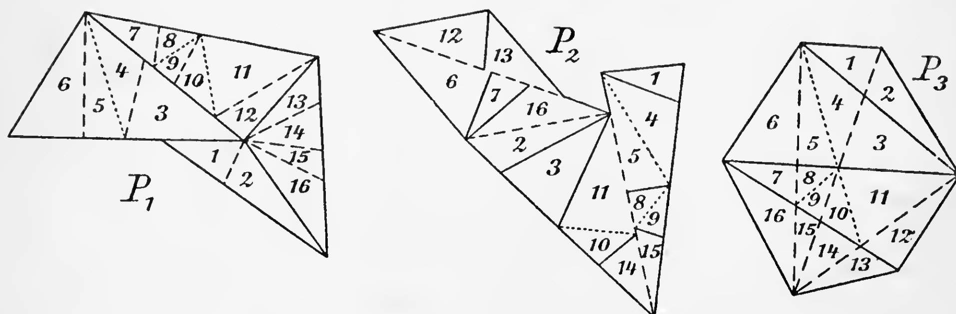
hinzuzufügen, so daß die beiden zusammengesetzten Polygone einander zerlegungsgleich sind.

Aus den letzteren Erklärungen folgt sofort: durch Zusammenfügung zerlegungsgleicher Polygone entstehen wieder zerlegungsgleiche Polygone, und wenn man zerlegungsgleiche Polygone von zerlegungsgleichen Polygonen wegnimmt, so sind die übrigbleibenden Polygone inhaltsgleich.

Ferner gelten folgende Sätze:

Satz 24. Sind zwei Polygone P_1 und P_2 mit einem dritten Polygon P_3 zerlegungsgleich, so sind sie auch untereinander zerlegungsgleich. Sind zwei Polygone mit einem dritten inhaltsgleich, so sind sie untereinander inhaltsgleich.

Beweis. Nach Voraussetzung läßt sich sowohl für P_1, als auch für P_2 eine Zerlegung in Dreiecke angeben, so daß einer jeden dieser



beiden Zerlegungen je eine Zerlegung des Polygons P_3 in kongruente Dreiecke entspricht. Indem wir diese Zerlegungen von P_3 gleichzeitig in Betracht ziehen, wird im allgemeinen jedes Dreieck der einen Zerlegung durch Strecken, welche der anderen Zerlegung angehören, in Polygone zerlegt. Wir fügen nun noch so viele Strecken hinzu, daß jedes dieser Polygone selbst wieder in Dreiecke zerfällt, und bringen dann die zwei entsprechenden Zerlegungen in Dreiecke in P_1 und in P_2 an; dann zerfallen offenbar diese beiden Polygone P_1 und P_2 in gleich viele paarweise einander kongruente Dreiecke und sind somit nach der Erklärung einander zerlegungsgleich.

Der Beweis der zweiten Aussage des Satzes 24 ergibt sich nunmehr ohne Schwierigkeit.

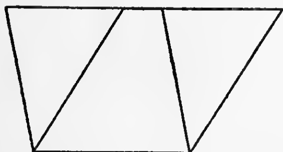
Wir erklären in der üblichen Weise die Begriffe: *Rechteck, Grundlinie* und *Höhe eines Parallelogrammes, Grundlinie* und *Höhe eines Dreiecks.*

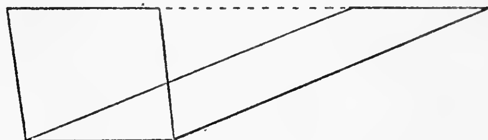
§ 19.

Parallelogramme und Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe.

Die bekannte in den untenstehenden Figuren illustrierte Schlußweise *Euklids* liefert den Satz:

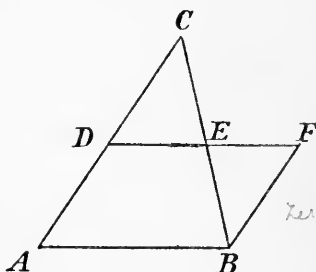
Satz 25. Zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander inhaltsgleich.





Ferner gilt die bekannte Tatsache:

Satz 26. Ein jedes Dreieck ABC ist stets einem gewissen Parallelogramm mit gleicher Grundlinie und halber Höhe zerlegungsgleich.



Beweis. Halbiert man AC in D und BC in E und verlängert dann DE um sich selbst bis F, so sind die Dreiecke DEC und FBE einander kongruent und folglich sind Dreieck ABC und Parallelogramm $ABFD$ einander inhaltsgleich.

Aus Satz 25 und Satz 26 folgt mit Hinzuziehung von Satz 24 unmittelbar:

Satz 27. Zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind einander inhaltsgleich.

Bekanntlich zeigt man leicht, daß zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe auch stets zerlegungsgleich sind. Wir bemerken jedoch, daß *dieser Nachweis ohne Benutzung des Archimedischen Axioms nicht möglich ist;* in der Tat lassen sich in unserer Nicht-Archimedischen Geometrie (vgl. Kap. II § 12) ohne Schwierigkeit zwei solche Dreiecke angeben, die gleiche Grundlinie und Höhe besitzen und folglich dem Satze 27 entsprechend inhaltsgleich, aber die dennoch nicht zerlegungsgleich sind. Als Beispiel mögen zwei Dreiecke ABC und ABD mit der gemeinsamen Grundlinie $AB = 1$ und der gleichen Höhe 1 dienen, wenn die Spitze C des ersteren Dreiecks senkrecht über A und im zweiten Dreiecke der Fußpunkt F der von der Spitze D gefällten Höhe so gelegen ist, daß $AF = t$ wird.

Wir erwähnen noch den leicht zu beweisenden Satz:

Satz 28. Zu einem beliebigen Dreiecke und mithin auch zu einem

beliebigen Polygon kann stets ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert werden, das eine Kathete 1 besitzt und das mit dem Dreiecke bez. Polygon inhaltsgleich ist.

Auch die übrigen Sätze aus der elementaren Geometrie über die Inhaltsgleichheit von Polygonen, insbesondere der Pythagoräische Lehrsatz sind leichte Folgerungen der eben aufgestellten Sätze. Wir begegnen aber dennoch bei der weiteren Durchführung der Theorie der Flächeninhalte einer wesentlichen Schwierigkeit. Insbesondere lassen es unsere bisherigen Betrachtungen dahingestellt, ob nicht etwa alle Polygone stets einander inhaltsgleich sind. In diesem Falle wären die sämtlichen vorhin aufgestellten Sätze nichtssagend und ohne Bedeutung. Hiermit hängt die Frage zusammen, ob zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinschaftlichen Seite auch notwendig in der anderen Seite übereinstimmen, d. h., ob ein Rechteck durch eine Seite und den Flächeninhalt eindeutig bestimmt ist.

Wie die nähere Überlegung zeigt, bedarf man zur Beantwortung der aufgeworfenen Fragen der Umkehrung des Satzes 27, die folgendermaßen lautet:

Satz 29. *Wenn zwei inhaltsgleiche Dreiecke gleiche Grundlinie haben, so haben sie auch gleiche Höhe.*

Dieser fundamentale Satz 29 findet sich im ersten Buch der Elemente des *Euklid* als 39ster Satz; beim Beweise desselben beruft sich jedoch *Euklid* auf den allgemeinen Größensatz: „*Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν*“ — ein Verfahren, welches auf die Einführung eines neuen geometrischen Axioms über Flächeninhalte hinausläuft.

Es gelingt nun, den Satz 29 und damit die Lehre von den Flächeninhalten auf dem hier von uns in Aussicht genommenen Wege, d. h. lediglich mit Hilfe der ebenen Axiome ohne Benutzung des Archimedischen Axioms zu begründen. Um dies einzusehen, haben wir den Begriff des Inhaltsmaßes nötig.

§ 20.

Das Inhaltsmaß von Dreiecken und Polygonen.

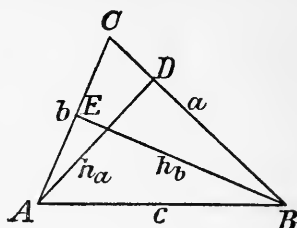
Erklärung: Wenn wir in einem Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c die beiden Höhen $h_a = AD$, $h_b = BE$ konstruieren, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCE und ACD nach Satz 22 die Proportion

$$a : h_b = b : h_a,$$

d. h.

$$ah_a = bh_b;$$

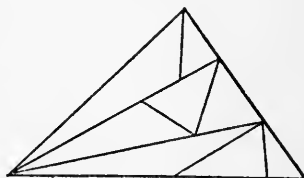
mithin ist in jedem Dreiecke das Produkt aus einer Grundlinie und der zu ihr gehörigen Höhe davon unabhängig, welche Seite des Dreiecks man als Grundlinie wählt. Das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe eines Dreiecks Δ ist also eine für das Dreieck charakteristische Strecke; sie heiße das *Inhaltsmaß des Dreiecks* Δ und werde mit $J(\Delta)$ bezeichnet.



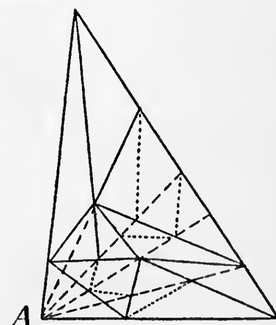
Erklärung. Eine Strecke, welche eine Ecke eines Dreiecks mit einem Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, heißt *Transversale des Dreiecks;* dieselbe zerlegt das Dreieck in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Höhe, deren Grundlinien in dieselbe Gerade fallen; eine solche Zerlegung heiße eine *transversale Zerlegung des Dreiecks.*

Satz 30. Wenn ein Dreieck Δ durch beliebige Gerade irgendwie in eine gewisse endliche Anzahl von Dreiecken Δ_k zerlegt wird, so ist stets das Inhaltsmaß des Dreiecks Δ gleich der Summe der Inhaltsmaße der sämtlichen Dreiecke Δ_k.

Beweis. Aus dem distributiven Gesetze in unserer Streckenrechnung folgt unmittelbar, daß das Inhaltsmaß eines beliebigen Dreiecks gleich der Summe der Inhaltsmaße zweier solcher Dreiecke ist, die durch irgendwelche transversale Zerlegung aus jenem Dreieck hervorgehen. Die wiederholte Anwendung dieser Tatsache zeigt, daß das Inhaltsmaß eines beliebigen Dreiecks auch gleich der Summe der Inhaltsmaße der sämtlichen Dreiecke ist, die aus dem vorgelegten Dreiecke entstehen, wenn man nacheinander beliebig viele transversale Zerlegungen ausführt.



Um nun den entsprechenden Nachweis für die beliebige Zerlegung des Dreiecks Δ in Dreiecke Δ_k zu erbringen, ziehen wir von der einen Ecke A des Dreieckes Δ durch jeden Teilpunkt der Zerlegung, d. h. durch jeden Eckpunkt der Dreiecke Δ_k eine Transversale; durch diese Transversalen zerfällt das Dreieck Δ in gewisse Dreiecke Δ_t. Jedes dieser Dreiecke Δ_t zerfällt durch die Teilstrecken der gegebenen Zerlegung in gewisse Dreiecke und Vierecke. Wenn wir in den Vierecken noch je eine Diagonale konstruieren, so zerfällt jedes Dreieck Δ_t in gewisse Dreiecke Δ_{ts}. Wir wollen nun zeigen, daß die Zerlegung in Dreiecke Δ_{ts} sowohl für die Dreiecke Δ_t



als auch für die Dreiecke $\varDelta_k$ nichts anderes als eine Kette von transversalen Zerlegungen bedeutet.

In der Tat, zunächst ist klar, daß jede Zerlegung eines Dreiecks in Teildreiecke stets durch eine Reihe von transversalen Zerlegungen bewirkt werden kann, wenn bei der Zerlegung im Inneren des Dreiecks keine Teilpunkte liegen und überdies wenigstens eine Seite des Dreiecks von Teilpunkten frei bleibt.

Nun ist für die Dreiecke $\varDelta_t$ unsere Behauptung aus dem Umstande ersichtlich, daß für jedes derselben das Innere sowie eine Seite, nämlich die dem Punkte A gegenüberliegende Seite von weiteren Teilpunkten frei ist.

Aber auch für jedes $\varDelta_k$ ist die Zerlegung in $\varDelta_{ts}$ auf transversale Zerlegungen zurückführbar. Betrachten wir nämlich ein Dreieck $\varDelta_k$, so wird es unter den von A ausgehenden Transversalen im Dreieck $\varDelta$ eine bestimmte Transversale geben, in welche entweder eine Seite von $\varDelta_k$ hineinfällt oder welche selbst das Dreieck $\varDelta_k$ in zwei Dreiecke zerlegt. Im ersten Falle bleibt die betreffende Seite des Dreiecks $\varDelta_k$ überhaupt frei von weiteren Teilpunkten bei der Zerlegung in Dreiecke $\varDelta_{ts}$; im letzteren Falle ist die im Inneren des Dreiecks $\varDelta_k$ verlaufende Strecke jener Transversalen in den beiden entstehenden Dreiecken eine Seite, die bei der Teilung in Dreiecke $\varDelta_{ts}$ von weiteren Teilpunkten gewiß frei bleibt.

Nach der am Anfang dieses Beweises angestellten Betrachtung ist das Inhaltsmaß $J(\varDelta)$ des Dreiecks $\varDelta$ gleich der Summe aller Inhaltsmaße $J(\varDelta_t)$ der Dreiecke $\varDelta_t$, und diese Summe ist gleich der Summe aller Inhaltsmaße $J(\varDelta_{ts})$. Andererseits ist auch die Summe über die Inhaltsmaße $J(\varDelta_k)$ aller Dreiecke $\varDelta_k$ gleich der Summe aller Inhaltsmaße $J(\varDelta_{ts})$, und hieraus folgt endlich, daß das Inhaltsmaß $J(\varDelta)$ auch gleich der Summe aller Inhaltsmaße $J(\varDelta_k)$ ist. Damit ist der Beweis des Satzes 30 vollständig erbracht.

Erklärung. Definieren wir das Inhaltsmaß $J(P)$ eines Polygons als die Summe der Inhaltsmaße aller Dreiecke, in die dasselbe bei einer bestimmten Zerlegung zerfällt, so erkennen wir auf Grund des Satzes 30 durch eine ähnliche Schlußweise, wie wir sie in § 18 beim Beweise des Satzes 24 angewandt haben, daß das Inhaltsmaß eines Polygons von der Art der Zerlegung in Dreiecke unabhängig ist und mithin allein durch das Polygon sich eindeutig bestimmt. Aus dieser Erklärung entnehmen wir vermittels des Satzes 30 die Tatsache, daß zerlegungsgleiche Polygone gleiches Inhaltsmaß haben.

Sind ferner P und Q zwei inhaltsgleiche Polygone, so muß es nach der Erklärung zwei zerlegungsgleiche Polygone P' und Q' geben, so daß

das aus P und P' zusammengesetzte Polygon $(P + P')$ mit dem aus Q und Q' zusammengesetzten Polygon $(Q + Q')$ zerlegungsgleich ausfällt. Aus den beiden Gleichungen

$$J(P + P') = J(Q + Q'),$$
$$J(P') = J(Q')$$

schließen wir leicht

$$J(P) = J(Q),$$

d. h. inhaltsgleiche Polygone haben gleiches Inhaltsmaß.

§ 21.

Die Inhaltsgleichheit und das Inhaltsmaß.

In § 20 haben wir gefunden, daß inhaltsgleiche Polygone stets gleiches Inhaltsmaß haben. Aus dieser Tatsache entnehmen wir unmittelbar den Beweis des Satzes 29. Bezeichnen wir nämlich die gleiche Grundlinie der beiden Dreiecke mit g, die zugehörigen Höhen mit h und h', so schließen wir aus der angenommenen Inhaltsgleichheit der beiden Dreiecke, daß dieselben auch gleiches Inhaltsmaß haben müssen, d. h. es folgt:

$$\tfrac{1}{2} gh = \tfrac{1}{2} gh'$$

und mithin nach Division durch $\frac{1}{2} g$

$$h = h';$$

dies ist die Aussage des Satzes 29.

Auch läßt sich nunmehr die am Schluß von § 20 gemachte Aussage umkehren. In der Tat, seien P und Q zwei Polygone mit gleichem Inhaltsmaß, so konstruieren wir gemäß Satz 28 zwei rechtwinklige Dreiecke Δ und E, von denen jedes eine Kathete 1 besitzt und so daß das Dreieck Δ mit dem Polygon P und das Dreieck E mit dem Polygon Q inhaltsgleich ist. Aus dem am Schluß von § 20 bewiesenen Satze folgt dann, daß Δ mit P und ebenso E mit Q gleiche Inhaltsmaße haben. Wegen des gleichen Inhaltsmaßes von P und Q folgt hieraus, daß auch Δ und E gleiches Inhaltsmaß haben. Da nun diese beiden rechtwinkligen Dreiecke in der Kathete 1 übereinstimmen, so stimmen notwendig auch ihre anderen Katheten überein, d. h. die beiden Dreiecke Δ und E sind einander kongruent und mithin sind nach Satz 24 die beiden Polygone P und Q einander inhaltsgleich.

Die beiden in diesem und dem vorigen Paragraph gefundenen Tatsachen fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Satz 31. *Zwei inhaltsgleiche Polygone haben stets das gleiche Inhaltsmaß und zwei Polygone mit gleichem Inhaltsmaß sind stets einander inhaltsgleich.*

Insbesondere müssen zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit einer gemeinsamen Seite auch in den anderen Seiten übereinstimmen. Auch folgt der Satz:

Satz 32. Zerlegt man ein Rechteck durch Gerade in mehrere Dreiecke und läßt auch nur eines dieser Dreiecke fort, so kann man mit den übrigen Dreiecken das Rechteck nicht mehr ausfüllen[1]).

Dieser Satz ist von *de Zolt*[2]) und von *O. Stolz*[3]) als Axiom hingestellt und von *F. Schur*[4]) und *W. Killing*[5]) mit Hilfe des Archimedischen Axioms bewiesen worden. Im vorstehenden ist gezeigt, daß derselbe völlig unabhängig von dem Archimedischen Axiom gilt.

Zum Beweise der Sätze 29, 30, 31 haben wir wesentlich die in Kapitel III § 15 eingeführte Streckenrechnung benutzt, und da diese im wesentlichen auf dem Pascalschen Satze (Satz 21) beruht, so erweist sich für die Lehre von den Flächeninhalten der Pascalsche Satz als der wichtigste Baustein.

Wir erkennen leicht, daß auch umgekehrt aus den Sätzen 27 und 29 der Pascalsche Satz wieder gewonnen werden kann. In der Tat, aus der Parallelität der Geraden CB' und $C'B$ folgt nach Satz 27 die Inhaltsgleichheit der Dreiecke OBB' und OCC'; ebenso folgt aus der Parallelität der Geraden CA' und AC' die Inhaltsgleichheit der Dreiecke OAA' und OCC' Da hiernach auch die Dreiecke OAA' und OBB' einander inhaltsgleich sind, so ergibt Satz 29, daß auch BA' zu AB' parallel sein muß.

Von zwei nicht inhaltsgleichen Polygonen P und Q nennen wir P *inhaltskleiner* bez. *inhaltsgrößer* als Q, je nachdem das Inhaltsmaß $J(P)$ kleiner oder größer als $J(Q)$ ausfällt. Es ist nach dem vorstehenden klar, daß die Begriffe inhaltsgleich, inhaltskleiner und inhaltsgrößer sich gegen-

1) Hinsichtlich der merkwürdigen Rolle, die dieser Satz 32 behufs Ergänzung der sogenannten „Kongruenzsätze im engeren Sinne" spielt, vergleiche man den Schluß von Anhang II S. 105—106.

2) Principii della eguaglianza di polizoni preceduti da alcuni critici sulla teoria della equivalenza geometrica. Milano, Briola 1881. Vgl. auch Principii della eguaglianza di poliedri e di polizoni sferici. Milano, Briola 1883.

3) Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5, 1894.

4) Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges. 1892.

5) Grundlagen der Geometrie, Bd. 2, Abschnitt 5, § 5, 1898.

seitig ausschließen. Ferner erkennen wir leicht, daß ein Polygon, welches ganz im Inneren eines anderen Polygons liegt, stets inhaltskleiner als dieses sein muß.

Hiermit haben wir die wesentlichen Sätze der Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene begründet.

Bereits Gauß hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die entsprechende Frage für den Raum gelenkt. Ich habe die Vermutung der Unmöglichkeit einer analogen Begründung der Lehre von den Inhalten im Raume ausgesprochen und die bestimmte Aufgabe[1]) gestellt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen, und die sich auch durch Hinzufügung kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.

M. Dehn[2]) ist dieser Nachweis in der Tat gelungen; er hat damit in strenger Weise die Unmöglichkeit dargetan, die Lehre von den räumlichen Inhalten so zu begründen, wie dies im vorstehenden für die ebenen Inhalte geschehen ist.

Hiernach wären zur Behandlung der analogen Fragen für den Raum andere Hilfsmittel, etwa das Cavalierische Prinzip heranzuziehen.

Kapitel V.

Der Desarguessche Satz.

§ 22.

Der Desarguessche Satz und der Beweis desselben in der Ebene mit Hilfe der Kongruenzaxiome.

Von den im Kapitel I aufgestellten Axiomen sind diejenigen der Gruppen II—V sämtlich teils lineare, teils ebene Axiome; die Axiome 4—8 der Gruppe I sind die einzigen räumlichen Axiome. Um die Bedeutung dieser räumlichen Axiome klar zu erkennen, denken wir uns irgend eine ebene Geometrie vorgelegt und untersuchen allgemein die Bedingungen dafür, daß diese ebene Geometrie sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen läßt, in welcher die Axiome der Gruppen I—II, IV sämtlich erfüllt sind.

---

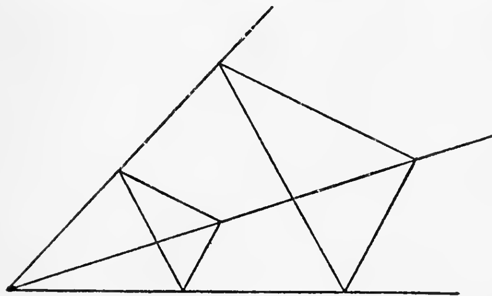
1) Vgl. meinen Vortrag „Mathematische Probleme" Nr. 3.

2) Über raumgleiche Polyeder, Göttinger Nachr. 1900, sowie Über den Rauminhalt, Math. Ann. Bd. 55. 1902. Vgl. ferner Kagan, Math. Ann. Bd. 57.

Auf Grund der Axiome der Gruppen I—II, IV ist es bekanntlich leicht möglich, den sogenannten Desarguesschen Satz zu beweisen; derselbe ist ein ebener Schnittpunktsatz. Wir nehmen insbesondere die Gerade, auf der die Schnittpunkte entsprechender Seiten der beiden Dreiecke liegen sollen, zur „Unendlichfernen", wie man sagt, und bezeichnen den so entstehenden Satz nebst seiner Umkehrung schlechthin als Desarguesschen Satz; dieser Satz lautet wie folgt:

Satz 33. (Desarguesscher Satz.) Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch ein und denselben Punkt oder sind einander parallel, und umgekehrt:

Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen Punkt laufen oder einander parallel sind, und wenn ferner zwei Paare entsprechender Seiten in den Dreiecken parallel sind, so sind auch die dritten Seiten der beiden Dreiecke einander parallel.



Wie bereits erwähnt, ist der Satz 33 eine Folge der Axiome I, II, IV; dieser Tatsache gemäß ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene jedenfalls eine notwendige Bedingung dafür, daß die Geometrie dieser Ebene sich als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen läßt, in welcher die Axiome der Gruppen I, II, IV sämtlich erfüllt sind.

Wir nehmen nun wie in den Kapiteln III und IV eine ebene Geometrie an, in welcher die Axiome I 1—3 und II—IV gelten, und denken uns in derselben nach § 15 eine Streckenrechnung eingeführt: dann läßt sich, wie in § 17 dargelegt worden ist, jedem Punkte der Ebene ein Paar von Strecken (x, y) und jeder Geraden ein Verhältnis von drei Strecken $(u : v : w)$, wobei u, v nicht beide Null sind, zuordnen derart, daß die lineare Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade darstellt. Das System aller Strecken in unserer Geometrie bildet nach § 17 einen Zahlenbereich, für welchen die in § 13 aufgezählten Eigenschaften 1—16 bestehen, und wir können daher mittels dieses Zahlenbereiches, ähnlich wie es in § 9 oder § 12 mittels des Zahlensystems Ω bez. $\Omega(t)$ geschehen ist, eine räumliche Geometrie konstruieren: wir setzen zu dem Zwecke

fest, daß ein System von drei Strecken (x, y, z) einen Punkt, die Verhältnisse von vier Strecken $(u : v : w : r)$ eine Ebene darstellen möge, während die Geraden als Schnitte zweier Ebenen definiert sind; dabei drückt die lineare Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

aus, daß der Punkt (x, y, z) auf der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt. Was endlich die Anordnung der Punkte auf einer Geraden oder der Punkte einer Ebene in Bezug auf eine Gerade in ihr oder endlich die Anordnung der Punkte in Bezug auf eine Ebene im Raume anbetrifft, so wird diese in analoger Weise durch Ungleichungen zwischen Strecken bestimmt, wie dies in § 9 für die Ebene geschehen ist.

Da wir durch das Einsetzen des Wertes $z = 0$ die ursprüngliche ebene Geometrie wieder gewinnen, so erkennen wir, daß unsere ebene Geometrie als Teil einer räumlichen Geometrie betrachtet werden kann. Nun ist hierfür die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes nach den obigen Ausführungen eine notwendige Bedingung, und daher folgt, daß in der angenommenen ebenen Geometrie auch der Desarguessche Satz gelten muß.

Wir bemerken, daß die eben gefundene Tatsache sich auch direkt aus dem Satze 23 in der Lehre von den Proportionen ohne Mühe ableiten läßt.

§ 23.

Die Nichtbeweisbarkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene ohne Hilfe der Kongruenzaxiome.

Wir untersuchen nun die Frage, ob in der ebenen Geometrie auch ohne Hilfe der Kongruenzaxiome der Desarguessche Satz bewiesen werden kann, und gelangen dabei zu folgendem Resultate:

Satz 34. *Es gibt eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome* I 1—3, II, III 1—5, IV, V, *d. h. sämtliche linearen und ebenen Axiome mit Ausnahme des Kongruenzaxioms* III 6 *erfüllt sind, während der Desarguessche Satz* (Satz 32) *nicht gilt. Der Desarguessche Satz kann mithin aus den genannten Axiomen allein nicht gefolgert werden: es bedarf zum Beweise desselben notwendig entweder der räumlichen Axiome oder des Axioms* III 6 *über die Kongruenz der Dreiecke.*

Beweis. Wir wählen in der gewöhnlichen ebenen Geometrie, deren Möglichkeit bereits im Kapitel II § 9 erkannt worden ist, irgend zwei zu einander senkrechte Gerade als Koordinatenachsen X, Y und denken uns um den Nullpunkt O dieses Koordinatensystems als Mittelpunkt eine Ellipse z. B. mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{2}$ konstruiert; endlich bezeichnen wir

mit F den Punkt, welcher in der Entfernung $\frac{3}{2}$ von O auf der positiven X-Achse liegt.

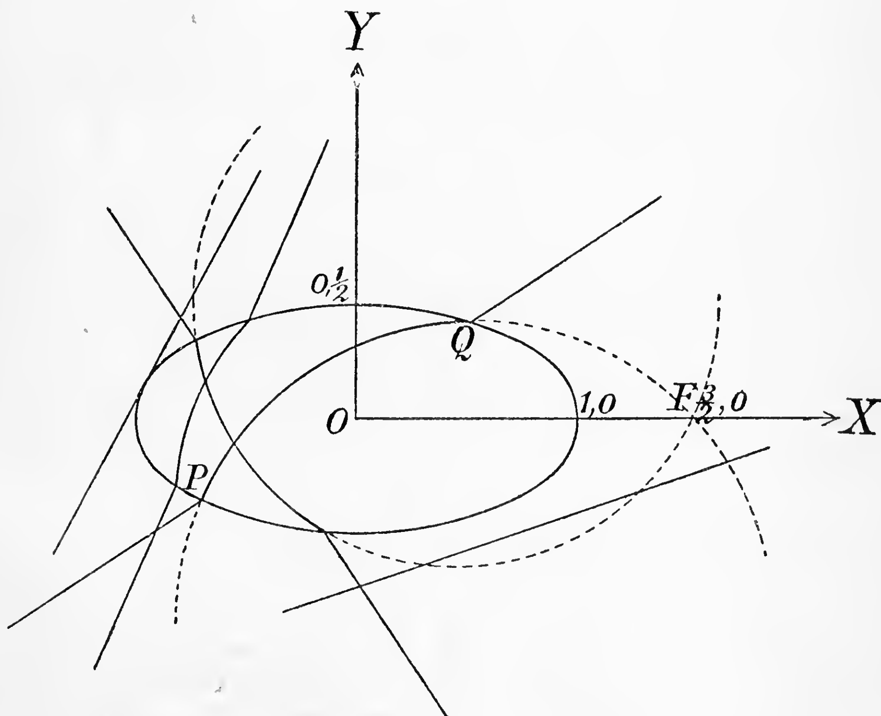
Wir fassen nun die Gesamtheit aller Kreise ins Auge, welche die Ellipse in vier reellen — getrennten oder beliebig zusammenfallenden — Punkten schneiden, und suchen unter allen auf diesen Kreisen gelegenen Punkten denjenigen Punkt zu bestimmen, der auf der positiven X-Achse am weitesten vom Nullpunkt entfernt ist. Zu dem Zwecke gehen wir von einem beliebigen Kreise aus, der die Ellipse in vier Punkten schneidet und die positive X-Achse im Punkte C treffen möge. Diesen Kreis denken wir uns dann um den Punkt C derart gedreht, daß zwei von den vier Schnittpunkten oder mehr in einen einzigen Punkt A zusammenfallen, während die übrigen reell bleiben. Der so entstehende Berührungskreis werde alsdann vergrößert derart, daß stets der Punkt A Berührungspunkt mit der Ellipse bleibt; hierdurch gelangen wir notwendig zu einem Kreise, der die Ellipse entweder noch in einem anderen Punkte B berührt oder in A mit der Ellipse eine vierpunktige Berührung aufweist und der überdies die positive X-Achse in einem entfernteren Punkte als C trifft. Der gesuchte entfernteste Punkt wird sich demnach unter denjenigen Punkten befinden, die von den doppeltberührenden außerhalb der Ellipse verlaufenden Kreisen auf der positiven X-Achse ausgeschnitten werden. Die doppeltberührenden außerhalb der Ellipse verlaufenden Kreise liegen nun, wie man leicht sieht, sämtlich zur Y-Achse symmetrisch. Es seien a, b die Koordinaten irgend eines Punktes der Ellipse: dann lehrt eine leichte Rechnung, daß der in diesem Punkte berührende zur Y-Achse symmetrische Kreis auf der positiven X-Achse die Strecke

$$x = |\sqrt{1 + 3b^2}|$$

abschneidet. Der größtmögliche Wert dieses Ausdrucks tritt für $b = \frac{1}{2}$ ein und wird somit gleich $\frac{1}{2}|\sqrt{7}|$. Da der vorhin mit F bezeichnete Punkt auf der X-Achse die Abscisse $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}|\sqrt{7}|$ aufweist, so folgt, daß unter den die Ellipse viermal treffenden Kreisen sich gewiß keiner befindet, der durch den Punkt F läuft.

Nunmehr stellen wir uns eine neue ebene Geometrie in folgender Weise her. Als Punkte der neuen Geometrie nehmen wir die Punkte der XY-Ebene; als Gerade der neuen Geometrie nehmen wir diejenigen Geraden der XY-Ebene unverändert, welche die feste Ellipse berühren oder gar nicht treffen; ist dagegen g eine Gerade der XY-Ebene, die die Ellipse in zwei Punkten P und Q trifft, so konstruieren wir durch P, Q und den festen Punkt F einen Kreis; dieser Kreis hat, wie aus dem oben Bewiesenen hervorgeht, keinen weiteren Punkt mit der Ellipse gemein. Wir denken uns nun an Stelle des zwischen P und Q innerhalb

der Ellipse gelegenen Stückes der Geraden g denjenigen Bogen des eben konstruierten Kreises gesetzt, der zwischen P und Q innerhalb der Ellipse verläuft. Den Linienzug, welcher aus den beiden von P und Q ausgehenden unendlichen Stücken der Geraden g und dem eben konstruierten Kreisbogen PQ besteht, nehmen wir als Gerade der neu herzustellenden Geometrie. Denken wir uns für alle Geraden der XY-Ebene die entsprechenden Linienzüge konstruiert, so entsteht ein System von Linien-



zügen, welche, als Gerade einer Geometrie aufgefaßt, offenbar den Axiomen I 1—2 und III genügen. Bei Festsetzung der natürlichen Anordnung für die Punkte und Geraden in unserer neuen Geometrie erkennen wir unmittelbar, daß auch die Axiome II gültig sind.

Ferner nennen wir zwei Strecken AB und $A'B'$ in unserer neuen Geometrie kongruent, wenn der zwischen A und B verlaufende Linienzug die gleiche natürliche Länge hat, wie der zwischen A' und B' verlaufende Linienzug.

Endlich bedürfen wir einer Festsetzung betreffs der Kongruenz der Winkel. Sobald keiner von den Scheiteln der zu vergleichenden Winkel

auf der Ellipse liegt, nennen wir zwei Winkel einander kongruent, wenn sie im gewöhnlichen Sinne einander gleich sind. Im anderen Falle treffen wir folgende Festsetzung. Es mögen die Punkte A, B, C in dieser Reihenfolge und die Punkte A', B', C' in dieser Reihenfolge je auf einer Geraden unserer neuen Geometrie liegen; D sei ein Punkt außerhalb der Geraden ABC und D' ein Punkt außerhalb der Geraden $A'B'C'$: dann mögen für die Winkel zwischen diesen Geraden in unserer neuen Geometrie die Kongruenzen

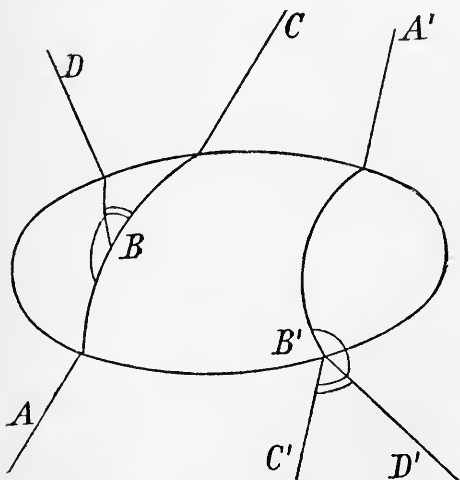
$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D' \quad \text{und} \quad \sphericalangle CBD \equiv C'B'D'$$

gelten, sobald für die natürlichen Winkel zwischen den entsprechenden Linienzügen in der gewöhnlichen Geometrie die Proportion

$$\sphericalangle ABD : \sphericalangle CBD = \sphericalangle A'B'D' : \sphericalangle C'B'D'$$

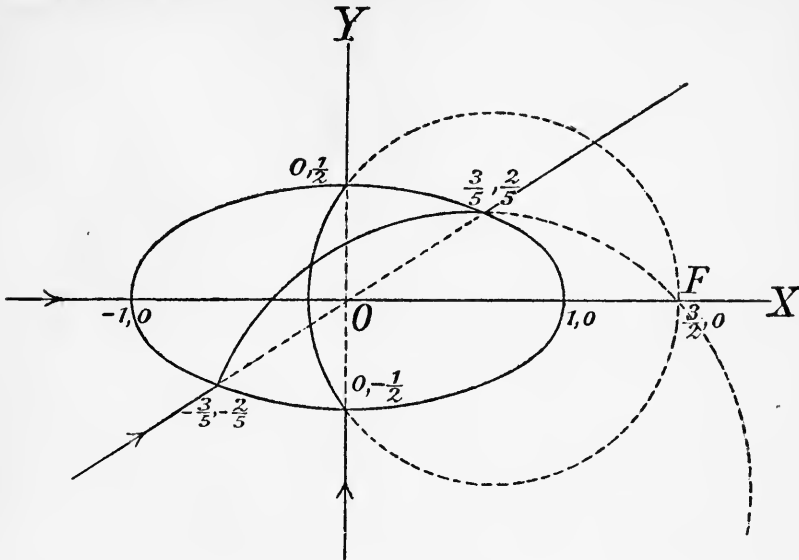
erfüllt ist. Bei diesen Festsetzungen sind auch die Axiome III 1—5 und V gültig.

Um einzusehen, daß in unserer neu hergestellten Geometrie der Desarguessche Satz nicht gilt, betrachten wir folgende drei gewöhnliche gerade Linien in der XY-Ebene: die X-Achse, die Y-Achse und die Gerade, welche die beiden Ellipsenpunkte $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ und $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$ mit einander verbindet. Da diese drei gewöhnlichen geraden Linien durch den Nullpunkt O laufen, so können wir leicht zwei solche Dreiecke angeben, deren Ecken bez. auf jenen drei Geraden liegen, deren entsprechende Seiten paarweise einander parallel laufen und die sämtlich außerhalb der Ellipse gelegen sind. Da die Linienzüge, welche aus den genannten drei geraden Linien entspringen, sich, wie die Figur auf S. 53 zeigt und wie man leicht durch Rechnung bestätigt, nicht in einem Punkte treffen, so folgt, daß der Desarguessche Satz in der neuen ebenen Geometrie für die beiden vorhin konstruierten Dreiecke gewiß nicht gilt.



Die von uns hergestellte ebene Geometrie dient zugleich als Beispiel einer ebenen Geometrie, in welcher die Axiome I 1—3, II, III 1—5, IV, V

gültig sind, und die sich doch nicht als Teil einer räumlichen Geometrie auffassen läßt.



§ 24.

Einführung einer Streckenrechnung ohne Hilfe der Kongruenzaxiome auf Grund des Desarguesschen Satzes.

Um die Bedeutung des Desarguesschen Satzes (Satz 33) vollständig zu erkennen, legen wir eine ebene Geometrie zu Grunde, in welcher die Axiome I 1—3, II, IV, d. h. die sämtlichen linearen und ebenen Axiome außer den Kongruenz- und Stetigkeitsaxiomen gültig sind, und führen in diese Geometrie unabhängig von den Kongruenzaxiomen auf folgende Weise eine neue Streckenrechnung ein.

Wir nehmen in der Ebene zwei feste Geraden an, die sich in dem Punkte O schneiden mögen, und rechnen im folgenden nur mit solchen Strecken, deren Anfangspunkt O ist und deren Endpunkte auf einer dieser beiden festen Geraden beliebig liegen. Auch den Punkt O allein bezeichnen wir als Strecke und nennen ihn dann die Strecke 0, in Zeichen

$$OO = 0 \quad \text{oder} \quad 0 = OO.$$

Es seien E und E' je ein bestimmter Punkt auf den festen Geraden durch O; dann bezeichnen wir die beiden Strecken OE und OE' als die Strecken 1, in Zeichen:

$$OE = OE' = 1 \quad \text{oder} \quad 1 = OE = OE'.$$

Die Gerade EE' nennen wir kurz die Einheitsgerade. Sind ferner A und A' Punkte auf den Geraden OE bez. OE' und läuft die Verbindungsgerade AA' parallel zu EE', so nennen wir die Strecken OA und OA' einander gleich, in Zeichen:

$$OA = OA' \quad \text{oder} \quad OA' = OA.$$

Um zunächst die Summe der Strecken $a = OA$ und $b = OB$ zu definieren, konstruiere man AA' parallel zur Einheitsgeraden EE' und ziehe sodann durch A' eine Parallele zu OE und durch B eine Parallele zu OE'. Diese beiden Parallelen mögen sich in A'' schneiden. Endlich ziehe man durch A'' zur Einheitsgeraden EE' eine Parallele; dieselbe treffe die festen Geraden OE und OE' in C und C': dann heiße $c = OC = OC'$ die *Summe* der Strecke $a = OA$ mit der Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$c = a + b \quad \text{oder} \quad a + b = c.$$

Um das Produkt einer Strecke $a = OA$ in eine Strecke $b = OB$ zu definieren, bedienen wir uns genau der in § 15 angegebenen Konstruktion, nur daß an Stelle der Schenkel des rechten Winkels hier die beiden festen Geraden OE und OE' treten. Die Konstruktion ist demnach folgende. Man bestimme auf OE' den Punkt A', so daß AA' parallel der Einheitsgeraden EE' wird, verbinde E mit A' und ziehe durch B eine Parallele zu EA'; trifft diese Parallele die feste Gerade OE' im Punkte C', so heißt $c = OC'$ das Produkt der Strecke $a = OA$ in die Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$c = ab \quad \text{oder} \quad ab = c.$$

§ 25.

Das kommutative und assoziative Gesetz der Addition in der neuen Streckenrechnung.

Wir untersuchen jetzt, welche von den in § 13 aufgestellten Rechnungsgesetzen für unsere neue Streckenrechnung gültig sind, wenn wir eine ebene Geometrie zu Grunde legen, in der die Axiome I 1—3, II—IV erfüllt sind und überdies der Desarguessche Satz gilt.

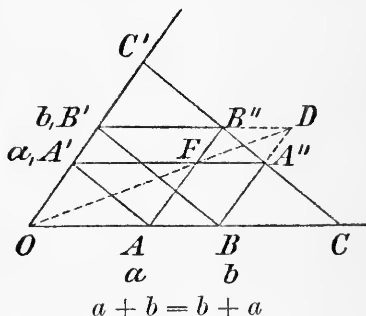
Vor allem wollen wir beweisen, daß für die in § 24 definierte Addition der Strecken das kommutative Gesetz

$$a + b = b + a$$

gilt. Es sei

$$a = OA = OA',$$
$$b = OB = OB',$$

wobei unserer Festsetzung entsprechend AA' und BB' der Einheitsgeraden parallel sind. Nun konstruieren wir die Punkte A'' und B'', indem wir $A'A''$ sowie $B'B''$ parallel OA und ferner AB'' und BA'' parallel OA' ziehen; wie man sofort sieht, sagt dann unsere Behauptung aus, daß die Verbindungslinie $A''B''$ parallel mit AA' läuft. Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennen wir auf Grund des Desarguesschen Satzes (Satz 32) wie folgt. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von AB'' und $A'A''$ mit F und den Schnittpunkt von BA'' und $B'B''$ mit D; dann sind in den Dreiecken $AA'F$ und $BB'D$ die entsprechenden Seiten einander parallel. Mittels des Desarguesschen Satzes schließen wir hieraus, daß die drei Punkte O, F, D in einer Geraden liegen. Infolge dieses Umstandes liegen die beiden Dreiecke OAA' und $DB''A''$ derart, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt F laufen und da überdies zwei Paare entsprechender Seiten, nämlich OA und DB'' sowie OA' und DA'' einander parallel sind, so laufen nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes (Satz 32) auch die dritten Seiten AA' und $B''A''$ einander parallel.

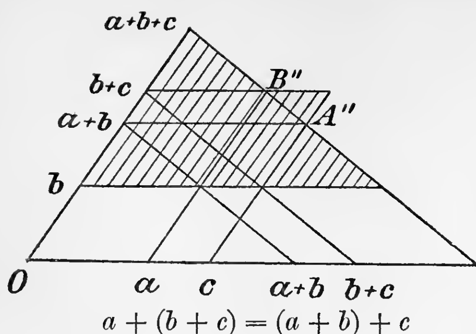


$a + b = b + a$

Zum Beweise des assoziativen Gesetzes der Addition

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

dient die Figur auf S. 56. Mit Berücksichtigung des eben bewiesenen



$a + (b + c) = (a + b) + c$

kommutativen Gesetzes der Addition spricht sich die obige Behauptung, wie man sieht, darin aus, daß die Gerade $A''B''$ parallel der Einheitsgeraden verlaufen muß. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist offenbar, da der schraffierte Teil dieser Figur mit der vorhergehenden Figur genau übereinstimmt.

§ 26.

Das assoziative Gesetz der Multiplikation und die beiden distributiven Gesetze in der neuen Streckenrechnung.

Bei unseren Annahmen gilt auch für die Multiplikation der Strecken das assoziative Gesetz:

$$a(bc) = (ab)c.$$

Es seien auf der ersteren der beiden festen Geraden durch O die Strecken

$$1 = OA, \quad b = OC, \quad c = OA'$$

und auf der anderen Geraden die Strecken

$$a = OG \quad \text{und} \quad b = OB$$

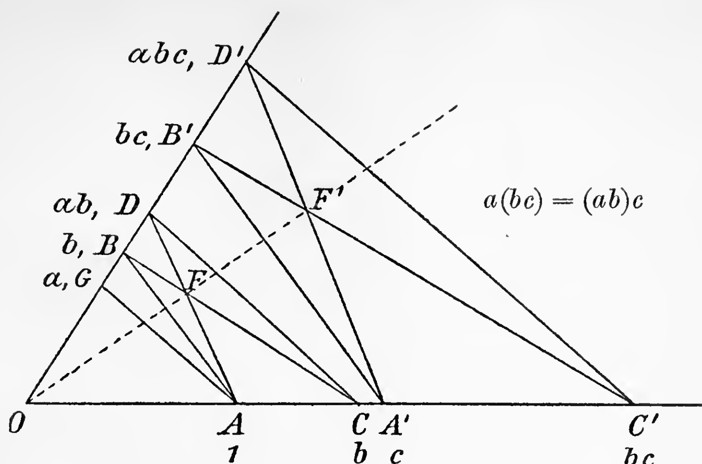
gegeben. Um gemäß der Vorschrift in § 24 der Reihe nach die Strecken

$$bc = OB' \quad \text{und} \quad bc = OC'$$

$$ab = OD,$$

$$(ab)c = OD'$$

zu konstruieren, ziehen wir $A'B'$ parallel AB, $B'C'$ parallel BC, CD parallel AG sowie $A'D'$ parallel AD; wie wir sofort erkennen, läuft dann unsere Behauptung darauf hinaus, daß auch CD parallel $C'D'$ sein muß. Bezeichnen wir nun den Schnittpunkt der Geraden AD und BC mit F und den Schnittpunkt der Geraden $A'D'$ und $B'C'$ mit F', so sind in den Dreiecken ABF und $A'B'F'$ die entsprechenden Seiten einander parallel; nach dem Desarguesschen Satze liegen daher die drei Punkte O, F, F' auf einer Geraden. Wegen dieses Umstandes können wir die zweite Aussage des Desarguesschen Satzes auf die beiden Dreiecke CDF und $C'D'F'$ anwenden und erkennen hieraus, daß in der Tat CD parallel $C'D'$ ist.



Wir beweisen endlich in unserer Streckenrechnung auf Grund des Desarguesschen Satzes die beiden distributiven Gesetze:

$$a(b+c) = ab + ac$$

und

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Zum Beweise des ersteren Gesetzes dient die Figur S. 58[1]. In derselben ist

$$b = OA', \quad c = OC'$$

$$ab = OB', \quad ab = OA'', \quad ac = OC'' \text{ u. s. f.}$$

und es läuft

$B''D_2$ parallel $C''D_1$ parallel zur festen Geraden OA',
$B'D_1$ „ $C'D_2$ „ „ „ „ OA'';

ferner ist

$$A'A'' \text{ parallel } C'C''$$

und

$$A'B'' \text{ parallel } B'A'' \text{ parallel } F'D_2 \text{ parallel } F''D_1.$$

Die Behauptung läuft darauf hinaus, daß dann auch

$$F'F'' \text{ parallel } A'A'' \text{ und } C'C''$$

sein muß.

Wir konstruieren folgende Hilfslinien:

$F''J$ parallel der festen Geraden OA',
$F'J$ „ „ „ „ OA'';

die Schnittpunkte der Geraden $C''D_1$ und $C'D_2$, $C''D_1$ und $F'J$, $C'D_2$

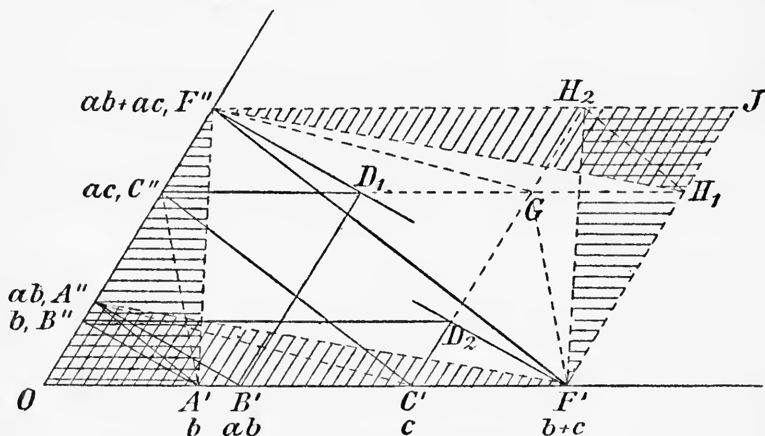
1) Die Figuren S. 58, 60 und 62 hat Herr Dr. *von Schaper* entworfen und auch die zugehörigen Beweise ausgeführt.

und $F''J$ heißen G, H_1, H_2; endlich erhalten wir noch die weiteren in der untenstehenden Figur punktierten Hilfslinien durch Verbindung bereits konstruierter Punkte.

In den beiden Dreiecken $A'B''C''$ und $F'D_2G$ laufen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken einander parallel; nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes folgt daher, daß

$$A'C'' \text{ parallel } F'G$$

sein muß. In den beiden Dreiecken $A'C''F''$ und $F'GH_2$ laufen ebenfalls die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken einander parallel;



$$a(b + c) = ab + ac$$

wegen der vorhin gefundenen Tatsache folgt nach der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes, daß

$$A'F'' \text{ parallel } F'H_2$$

sein muß. Da somit in den beiden wagerecht schraffierten Dreiecken $OA'F''$ und JH_2F' die entsprechenden Seiten parallel sind, so lehrt der Desarguessche Satz, daß die drei Verbindungsgeraden

$$OJ, \quad A'H_2, \quad F''F'$$

sich in einem und demselben Punkte, etwa in P, treffen.

Auf dieselbe Weise finden wir, daß auch

$$A''F' \text{ parallel } F''H_1$$

sein muß und da somit in den beiden schräg schraffierten Dreiecken $OA''F'$ und JH_1F'' die entsprechenden Seiten parallel laufen, so treffen sich dem Desarguesschen Satze zufolge die drei Verbindungsgeraden

$$OJ, \quad A''H_1, \quad F'F''$$

ebenfalls in einem Punkte — dem Punkte P.

Nunmehr laufen für die Dreiecke $OA'A''$ und JH_2H_1 die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt P, und mithin folgt, daß

$$H_1H_2 \text{ parallel } A'A''$$

sein muß; mithin ist auch

$$H_1H_2 \text{ parallel } C'C''.$$

Endlich betrachten wir die Figur $F''H_2C'C''H_1F'F''$. Da in derselben

$$\begin{array}{lllll} F''H_2 & \text{parallel} & C'F' & \text{parallel} & C''H_1 \\ H_2C' & \text{„} & F''C'' & \text{„} & H_1F' \\ C'C'' & \text{„} & H_1H_2 & & \end{array}$$

ausfällt, so erkennen wir hierin die Figur S. 55 ($B'B''AA'A''BB'$) wieder, die wir in § 25 zum Beweise für das kommutative Gesetz der Addition benutzt haben. Die entsprechenden Schlüsse wie dort zeigen dann, daß

$$F'F'' \text{ parallel } H_1H_2$$

sein muß und da mithin auch

$$F'F'' \text{ parallel } A'A''$$

ausfällt, so ist der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht.

Zum Beweise der zweiten Formel des distributiven Gesetzes dient die völlig verschiedene Figur S. 60. In derselben ist

$$1 = OD, \quad a = OA, \quad a = OB, \quad b = OG, \quad c = OD'$$
$$ac = OA', \quad ac = OB', \quad bc = OG' \text{ u. s. f.}$$

und es läuft

$$\begin{array}{llllll} GH & \text{parallel} & G'H' & \text{parallel zur festen Geraden} & OA, \\ AH & \text{„} & A'H' & \text{„ \quad „ \quad „} & OB \end{array}$$

und ferner

$$\begin{array}{lll} AB & \text{parallel} & A'B', \\ BD & \text{„} & B'D', \\ DG & \text{„} & D'G', \\ HJ & \text{„} & H'J'. \end{array}$$

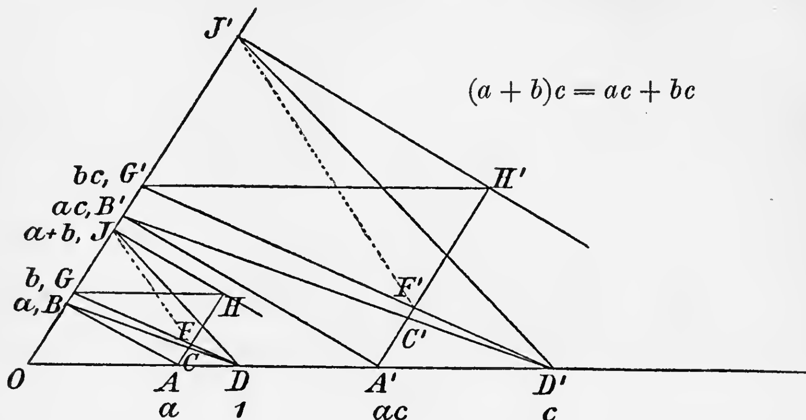
Die Behauptung läuft darauf hinaus, daß dann auch

$$DJ \text{ parallel } D'J'$$

sein muß.

Wir bezeichnen die Punkte, in denen BD und GD die Gerade AH treffen, bez. mit C und F und ferner die Punkte, in denen $B'D'$ und $G'D'$ die Gerade $A'H'$ treffen, bez. mit C' und F'; endlich ziehen wir noch die in der Figur S. 60 punktierten Hilfslinien FJ und $F'J'$.

In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ laufen die entsprechenden Seiten parallel; mithin liegen nach dem Desarguesschen Satze die drei Punkte O, C, C' auf einer Geraden. Ebenso folgt dann aus der Betrachtung der Dreiecke CDF und $C'D'F'$, daß O, F, F' auf einer Geraden liegen, und



die Betrachtung der Dreiecke FGH und $F'G'H'$ lehrt, daß O, H, H' Punkte einer Geraden sind. Nun laufen in den Dreiecken FHJ und $F'H'J'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken durch den nämlichen Punkt O, und mithin sind zufolge der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes die Geraden FJ und $F'J'$ einander parallel. Endlich zeigt dann die Betrachtung der Dreiecke DFJ und $D'F'J'$, daß die Geraden DJ und $D'J'$ einander parallel sind, und damit ist der Beweis unserer Behauptung vollständig erbracht.

§ 27.

Die Gleichung der Geraden auf Grund der neuen Streckenrechnung.

Wir haben in § 24 bis § 26 mittels der in § 24 angeführten Axiome und unter Voraussetzung der Gültigkeit des Desarguesschen Satzes in der Ebene eine Streckenrechnung eingeführt, in welcher das kommutative Gesetz der Addition, die assoziativen Gesetze der Addition und Multiplikation, sowie die beiden distributiven Gesetze gültig sind. Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, in welcher Weise auf Grund dieser Streckenrechnung eine analytische Darstellung der Punkte und Geraden in der Ebene möglich ist.

Erklärung. Wir bezeichnen in der Ebene die beiden angenommenen festen Geraden durch den Punkt O als die X- und Y-Achse und denken uns irgend einen Punkt P der Ebene durch die Strecken x, y bestimmt,

die man auf der X- bez. Y-Achse erhält, wenn man durch P zu diesen Achsen Parallelen zieht. Diese Strecken x, y heißen *Koordinaten* des Punktes P. Auf Grund der neuen Streckenrechnung und mit Hilfe des Desarguesschen Satzes gelangen wir zu der folgenden Tatsache:

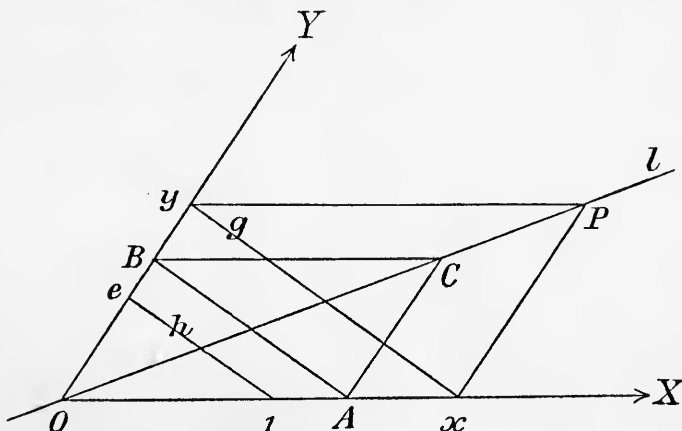
Satz 35. *Die Koordinaten x, y der Punkte auf einer beliebigen Geraden erfüllen stets eine Streckengleichung von der Gestalt:*

$$ax + by + c = 0;$$

in dieser Gleichung stehen die Strecken a, b notwendig linksseitig von den Koordinaten x, y; die Strecken a, b sind niemals beide Null und c ist eine beliebige Strecke.

Umgekehrt: jede Streckengleichung der beschriebenen Art stellt stets eine Gerade in der zu Grunde gelegten ebenen Geometrie dar.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Gerade l gehe durch O und sei von den Achsen verschieden. Ferner sei C ein bestimmter von O verschiedener Punkt auf l und P ein beliebiger Punkt auf l; C habe die Koordinaten OA, OB und P habe die Koordinaten x, y; wir bezeichnen die Verbindungsgerade der Endpunkte von x, y mit g. Endlich ziehen



wir durch den Endpunkt der Strecke 1 auf der X-Achse eine Parallele h zu AB; diese Parallele schneide auf der Y-Achse die Strecke e ab. Aus der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes folgt leicht, daß die Gerade g stets parallel zu AB läuft. Da somit auch g stets zu h parallel ist, so folgt für die Koordinaten x, y des beliebigen Punktes P auf l die Streckengleichung

$$ex = y.$$

Nunmehr sei l' eine beliebige nicht zu den Achsen parallele Gerade in unserer Ebene; dieselbe schneide auf der X-Achse die Strecke $c = OO'$ ab.

Wir ziehen ferner die Gerade l durch O parallel zu l'. Es sei P' ein beliebiger Punkt auf l'; die Parallele durch P' zur X-Achse treffe die Gerade l in P und schneide auf der Y-Achse die Strecke $y = OB$ ab; ferner mögen die Parallelen durch P und P' zur Y-Achse auf der X-Achse die Strecken $x = OA$ und $x' = OA'$ abschneiden.

Wir wollen nun beweisen, daß die Streckengleichung

$$x' = x + c$$

besteht. Zu diesem Zwecke ziehen wir $O'C$ parallel zur Einheitsgeraden,

ferner CD parallel zur X-Achse und AD parallel zur Y-Achse; dann läuft unsere Behauptung darauf hinaus, daß

$$A'D \text{ parallel } O'C$$

sein muß. Wir konstruieren noch D' als Schnittpunkt der Geraden CD und $A'P'$ und ziehen $O'C'$ parallel zur Y-Achse.

Da in den Dreiecken OCP und $O'C'P'$ die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken parallel laufen, so folgt mittels der zweiten Aussage des Desarguesschen Satzes, daß

$$CP \text{ parallel } C'P'$$

sein muß; auf gleiche Weise lehrt die Betrachtung der Dreiecke ACP und $A'C'P'$, daß

$$AC \text{ parallel } A'C'$$

ist. Da somit in den Dreiecken ACD und $C'A'O'$ die entsprechenden Seiten einander parallel laufen, so treffen sich die Geraden AC', CA', DO' in einem Punkte und die Betrachtung der beiden Dreiecke $C'A'D$ und ACO' zeigt dann, daß $A'D$ und CO' einander parallel sind.

Aus den beiden bisher gefundenen Streckengleichungen

$$ex = y \quad \text{und} \quad x' = x + c$$

folgt sofort die weitere Gleichung

$$ex' = y + ec.$$

Bezeichnen wir schließlich mit n die Strecke, die zur Strecke 1 addiert die Strecke 0 liefert, so folgt, wie man leicht beweist, aus der letzten Gleichung

$$ex' + ny + nec = 0$$

und diese Gleichung ist von der Gestalt, wie der Satz 35 behauptet.

Die zweite Aussage des Satzes 35 erkennen wir nun ohne Mühe als richtig; denn eine jede vorgelegte Streckengleichung

$$ax + by + c = 0,$$

wo $b \neq 0$ ist, läßt sich offenbar durch linksseitige Multiplikation mit einer geeigneten Strecke in die vorhin gefundene Gestalt

$$ex + ny + nec = 0$$

bringen.

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß bei unseren Annahmen eine Streckengleichung von der Gestalt

$$xa + yb + c = 0,$$

in der die Strecken a, b rechtsseitig von den Koordinaten x, y stehen, im allgemeinen nicht eine Gerade darstellt.

Wir werden in § 30 eine wichtige Anwendung von dem Satze 35 machen.

§ 28.

Der Inbegriff der Strecken aufgefaßt als komplexes Zahlensystem.

Wir sehen unmittelbar ein, daß für unsere neue in § 24 begründete Streckenrechnung die Sätze 1—6 in § 13 erfüllt sind.

Ferner haben wir in § 25 und § 26 mit Hilfe des Desarguesschen Satzes erkannt, daß für diese Streckenrechnung die Rechnungsgesetze 7—11 in § 13 gültig sind; es bestehen somit sämtliche Sätze der Verknüpfung, abgesehen vom kommutativen Gesetze der Multiplikation.

Um endlich eine Anordnung der Strecken zu ermöglichen, treffen wir folgende Festsetzung. Es seien A, B irgend zwei verschiedene Punkte der Geraden OE; dann bringen wir gemäß Axiom II 4 die vier Punkte O, E, A, B in eine Reihenfolge. Ist dies auf eine der folgenden sechs Arten

$$ABOE,\quad AOBE,\quad AOEB,\quad OABE,\quad OAEB,\quad OEAB$$

möglich, so nennen wir die Strecke $a = OA$ *kleiner* als die Strecke $b = OB$, in Zeichen:

$$a < b.$$

Findet dagegen eine der sechs Reihenfolgen

$$BAOE,\quad BOAE,\quad BOEA,\quad OBAE,\quad OBEA,\quad OEBA$$

statt, so nennen wir die Strecke $a = OA$ *größer* als die Strecke $b = OA$, in Zeichen

$$a > b.$$

Diese Festsetzung bleibt auch in Kraft, wenn A oder B mit O oder E zusammenfallen, nur daß dann die zusammenfallenden Punkte als ein einziger Punkt anzusehen sind und somit lediglich die Anordnung dreier Punkte in Frage kommt.

Wir erkennen leicht, daß nunmehr in unserer Streckenrechnung auf Grund der Axiome II die Rechnungsgesetze 13—16 in § 13 erfüllt sind; somit bildet die Gesamtheit aller verschiedenen Strecken ein komplexes Zahlensystem, für welches die Gesetze 1—11, 13—16 in § 13, d. h. die sämtlichen Vorschriften außer dem kommutativen Gesetze der Multiplikation und den Sätzen von der Stetigkeit gewiß gültig sind; wir bezeichnen ein solches Zahlensystem im folgenden kurz als ein *Desarguessches Zahlensystem.*

§ 29.

Aufbau einer räumlichen Geometrie mit Hilfe eines Desarguesschen Zahlensystems.

Es sei nun irgend ein Desarguessches Zahlensystem D vorgelegt; dasselbe ermöglicht uns den Aufbau einer räumlichen Geometrie, in der die Axiome I, II, IV sämtlich erfüllt sind.

Um dies einzusehen, denken wir uns das System von irgend drei Zahlen (x, y, z) des Desarguesschen Zahlensystems D als einen Punkt und das System von irgend vier Zahlen $(u : v : w : r)$ in D, von denen die ersten drei Zahlen nicht zugleich 0 sind, als eine Ebene; doch sollen die Systeme $(u : v : w : r)$ und $(au : av : aw : ar)$, wo a irgend eine von 0 verschiedene Zahl in D bedeutet, die nämliche Ebene darstellen. Das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + wz + r = 0$$

möge ausdrücken, daß der Punkt (x, y, z) auf der Ebene $(u : v : w : r)$ liegt. Die Gerade endlich definieren wir mit Hilfe eines Systems zweier Ebenen $(u' : v' : w' : r')$ und $(u'' : v'' : w'' : r'')$, wenn es nicht möglich ist, zwei von 0 verschiedene Zahlen a', a'' in D zu finden, so daß gleichzeitig

$$a'u' = a''u'', \quad a'v' = a''v'', \quad a'w' = a''w''$$

wird. Ein Punkt (x, y, z) heißt auf dieser Geraden $[(u' : v' : w' : r'), (u'' : v'' : w'' : r'')]$ gelegen, wenn er den beiden Ebenen $(u' : v' : w' : r')$ und $(u'' : v'' : w'' : r'')$ gemeinsam ist. Zwei Gerade, welche dieselben Punkte enthalten, gelten als nicht verschieden.

Indem wir die Rechnungsgesetze 1—11 in § 13 anwenden, die nach Voraussetzung für die Zahlen in D gelten sollen, gelangen wir ohne Schwierigkeit zu dem Resultate, daß in der soeben aufgestellten räumlichen Geometrie die Axiome I und IV sämtlich erfüllt sind.

Damit auch den Axiomen II der Anordnung Genüge geschehe, treffen wir folgende Festsetzungen. Es seien

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

irgend drei Punkte einer Geraden

$$[(u' : v' : w' : r'), \quad (u'' : v'' : w'' : r'')];$$

dann heiße der Punkt (x_2, y_2, z_2) zwischen den beiden anderen gelegen, wenn wenigstens eine der sechs Paare von Ungleichungen

(1) $$x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3$$

(2) $$y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3$$

(3) $$z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3$$

erfüllt ist. Besteht nun etwa eine der beiden Doppelungleichungen (1), so schließen wir leicht, daß entweder $y_1 = y_2 = y_3$ oder notwendig eine der beiden Doppelungleichungen (2) und ebenso daß entweder $z_1 = z_2 = z_3$ oder eine der Doppelungleichungen (3) gelten muß. In der Tat, aus den Gleichungen

$$u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0,$$
$$u''x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

leiten wir durch linksseitige Multiplikation derselben mit geeigneten Zahlen aus D, die $\neq 0$ sind, und durch nachherige Addition der entstehenden Gleichungen ein Gleichungssystem von der Gestalt

(4) $$u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

ab. Hierin ist der Koeffizient v''' sicher nicht 0, da sonst die Gleichheit der drei Zahlen x_1, x_2, x_3 folgen würde. Aus

$$x_1 \lessgtr x_2 \lessgtr x_3$$

schließen wir

$$u'''x_1 \lesseqgtr u'''x_2 \lesseqgtr u'''x_3$$

und mithin wegen (4)

$$v'''y_1 + r''' \lesseqgtr v'''y_2 + r''' \lesseqgtr v'''y_3 + r'''$$

und daher

$$v'''y_1 \lesseqgtr v'''y_2 \lesseqgtr v'''y_3,$$

und da v''' nicht 0 ist, so haben wir

$$y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr y_3;$$

in jeder dieser Doppelungleichungen soll stets entweder durchweg das obere oder durchweg das mittlere oder durchweg das untere Zeichen gelten.

Die angestellten Überlegungen lassen erkennen, daß in unserer Geometrie die linearen Axiome II 1—3 der Anordnung zutreffen. Es bleibt noch zu zeigen übrig, daß in unserer Geometrie auch das ebene Axiom II 4 gültig ist.

Zu dem Zwecke sei eine Ebene $(u : v : w : r)$ und in ihr eine Gerade $[(u : v : w : r), (u' : v' : w' : r')]$ gegeben. Wir setzen fest, daß alle in der Ebene $(u : v : w : r)$ gelegenen Punkte (x, y, z), für die der Ausdruck $u'x + v'y + w'z + r'$ kleiner oder größer als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen Seite von jener Geraden gelegen sein sollen, und haben dann zu beweisen, daß diese Festsetzung sich mit der vorigen in Übereinstimmung befindet, was leicht geschehen kann.

Damit haben wir erkannt, daß die sämtlichen Axiome I, II, IV in derjenigen räumlichen Geometrie erfüllt sind, die in der oben geschilderten Weise aus dem Desarguesschen Zahlensystem D entspringt. Bedenken wir, daß der Desarguessche Satz eine Folge der Axiome I, II, IV ist, so sehen wir, daß die eben gefundene Tatsache die genaue Umkehrung desjenigen Ergebnisses darstellt, zu dem wir in § 28 gelangt sind.

§ 30.

Die Bedeutung des Desarguesschen Satzes.

Wenn in einer ebenen Geometrie die Axiome I 1—3, II, IV erfüllt sind und überdies der Desarguessche Satz gilt, so ist es nach § 24—§ 28 in dieser Geometrie stets möglich, eine Streckenrechnung einzuführen, für welche die Regeln 1—11, 13—16 in § 13 anwendbar sind. Wir betrachten nun weiter den Inbegriff dieser Strecken als ein komplexes Zahlensystem und bauen aus denselben nach den Entwickelungen in § 29 eine räumliche Geometrie auf, in der sämtliche Axiome I, II, IV gültig sind.

Fassen wir in dieser räumlichen Geometrie lediglich die Punkte $(x, y, 0)$ und diejenigen Geraden ins Auge, auf denen nur solche Punkte liegen, so entsteht eine ebene Geometrie, und wenn wir die in § 27 abgeleitete Tatsache berücksichtigen, so leuchtet ein, daß diese ebene Geometrie genau mit der zu Anfang vorgelegten ebenen Geometrie übereinstimmen muß. Damit gewinnen wir folgenden Satz, der als das Endziel der gesamten Entwickelungen dieses Kapitels V anzusehen ist:

Es seien in einer ebenen Geometrie die Axiome I 1—3, II, IV *erfüllt: dann ist die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese ebene Geometrie sich auffassen läßt als ein Teil einer räumlichen Geometrie, in welcher die sämtlichen Axiome* I, II, IV *erfüllt sind.*

Der Desarguessche Satz kennzeichnet sich so gewissermaßen für die ebene Geometrie als das Resultat der Elimination der räumlichen Axiome.

Die gefundenen Resultate setzen uns auch in den Stand zu erkennen, daß jede räumliche Geometrie, in der die Axiome I, II, IV sämtlich erfüllt sind, sich stets als ein Teil einer „Geometrie von beliebig vielen Dimensionen" auffassen läßt; dabei ist unter einer Geometrie von beliebig vielen Dimensionen eine Gesamtheit von Punkten, Geraden, Ebenen und noch weiteren Elementen zu verstehen, für welche die entsprechenden Axiome der Verknüpfung und Anordnung sowie das Parallelenaxiom erfüllt sind.

Kapitel VI.

Der Pascalsche Satz.

§ 31.

Zwei Sätze über die Beweisbarkeit des Pascalschen Satzes.

Der Desarguessche Satz (Satz 33) läßt sich bekanntlich aus den Axiomen I, II, IV, d. h. unter wesentlicher Benutzung der räumlichen Axiome beweisen; in § 23 habe ich gezeigt, daß der Beweis desselben ohne die räumlichen Axiome der Gruppe I und ohne die Kongruenzaxiome III nicht möglich ist, selbst wenn die Benutzung der Stetigkeitsaxiome gestattet wird.

In § 14 ist der Pascalsche Satz (Satz 21) und damit nach § 22 auch der Desarguessche Satz aus den Axiomen I 1—3, II—IV, also mit Ausschluß der räumlichen Axiome und unter wesentlicher Benutzung der Kongruenzaxiome abgeleitet worden. Es entsteht die Frage, ob auch der Pascalsche Satz ohne Hinzuziehung der Kongruenzaxiome bewiesen werden kann. Unsere Untersuchung wird zeigen, daß in dieser Hinsicht der Pascalsche Satz sich völlig anders als der Desarguessche Satz verhält, indem bei dem Beweise des Pascalschen Satzes die Zulassung oder Ausschließung des Archimedischen Axioms von entscheidendem Einflusse für seine Gültigkeit ist. Die wesentlichen Ergebnisse unserer Untersuchung fassen wir in den folgenden zwei Sätzen zusammen:

Satz 36. *Der Pascalsche Satz* (Satz 21) *ist beweisbar auf Grund der Axiome* I, II, IV, V, *d. h. unter Ausschließung der Kongruenzaxiome mit Zuhilfenahme des Archimedischen Axioms.*

Satz 37. *Der Pascalsche Satz* (Satz 21) *ist nicht beweisbar auf Grund der Axiome* I, II, IV, *d. h. unter Ausschließung der Kongruenzaxiome sowie des Archimedischen Axioms.*

In der Fassung dieser beiden Sätze können nach dem allgemeinen Satze 35 die räumlichen Axiome I 4—8 auch durch die Forderung der ebenen Geometrie ersetzt werden, daß der Desarguessche Satz (Satz 33) gelten soll.

§ 32.

Das kommutative Gesetz der Multiplikation im Archimedischen Zahlensystem.

Die Beweise der Sätze 36 und 37 beruhen wesentlich auf gewissen gegenseitigen Beziehungen, welche für die Rechnungsregeln und Grundtatsachen der Arithmetik bestehen und deren Kenntnis auch an sich von Interesse erscheint. Wir stellen die folgenden zwei Sätze auf:

Satz 38. *Für ein Archimedisches Zahlensystem ist das kommutative Gesetz der Multiplikation eine notwendige Folge der übrigen Rechnungsgesetze; d. h., wenn ein Zahlensystem die in* § 13 *aufgezählten Eigenschaften* 1—11, 13—17 *besitzt, so folgt notwendig, daß dasselbe auch der Formel* 12 *genügt.*

Beweis. Zunächst bemerken wir: wenn a eine beliebige Zahl des Zahlensystems und

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1$$

eine ganze rationale positive Zahl ist, so gilt für a und n stets das kommutative Gesetz der Multiplikation; es ist nämlich

$$an = a(1 + 1 + \cdots + 1) = a \cdot 1 + a \cdot 1 + \cdots + a \cdot 1 = a + a + \cdots + a$$

und ebenso

$$na = (1 + 1 + \cdots + 1)a = 1 \cdot a + 1 \cdot a + \cdots + 1 \cdot a = a + a + \cdots + a$$

Es seien nun im Gegensatz zu unserer Behauptung a, b solche zwei Zahlen des Zahlensystems, für welche das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht gültig ist. Wir dürfen dann, wie leicht ersichtlich, die Annahmen

$$a > 0, \ b > 0 \qquad ab - ba > 0$$

machen. Wegen der Forderung 6 in § 13 gibt es eine Zahl $c (> 0)$, so daß

$$(a + b + 1)c = ab - ba$$

ist. Endlich wählen wir eine Zahl d, die zugleich den Ungleichungen

$$d > 0, \quad d < 1, \quad d < c$$

genügt, und bezeichnen mit m und n zwei solche ganze rationale Zahlen $\geqq 0$, für die

$$md < a \leqq (m+1)d$$

bez.

$$nd < b \leqq (n+1)d$$

wird. Das Vorhandensein solcher Zahlen m, n ist eine unmittelbare Folgerung des Archimedischen Satzes (Satz 17 in § 13). Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Anfang dieses Beweises erhalten wir aus den letzteren Ungleichungen durch Multiplikation

$$ab \leqq mnd^2 + (m+n+1)d^2,$$
$$ba > mnd^2,$$

also durch Subtraktion

$$ab - ba \leqq (m+n+1)d^2.$$

Nun ist

$$md < a, \quad nd < b, \quad d < 1$$

und folglich

$$(m+n+1)d < a+b+1,$$

d. h.

$$ab - ba < (a+b+1)d$$

oder wegen $d < c$

$$ab - ba < (a+b+1)c.$$

Diese Ungleichung widerspricht der Bestimmung der Zahl c, und damit ist der Beweis für den Satz 38 erbracht.

§ 33.

Das kommutative Gesetz der Multiplikation im Nicht-Archimedischen Zahlensystem.

Satz 39. *Für ein Nicht-Archimedisches Zahlensystem ist das kommutative Gesetz der Multiplikation* nicht *eine notwendige Folge der übrigen Rechnungsgesetze; d. h. es gibt ein Zahlensystem, das die in* § 13 *aufgezählten Eigenschaften* 1—11, 13—16 *besitzt — ein Desarguessches Zahlensystem nach* § 28 —, *in welchem* nicht *das kommutative Gesetz* (12) *der Multiplikation besteht.*

Beweis. Es sei t ein Parameter und T irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \cdots;$$

darin mögen $r_0 (\neq 0)$, r_1, r_2, ... beliebige rationale Zahlen bedeuten und n sei eine beliebige ganze rationale Zahl $\gtreqless 0$. Ferner sei s ein anderer Parameter und S irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \cdots;$$

darin mögen $T_0(\neq 0)$, T_1, $T_2, \ldots$ beliebige Ausdrücke von der Gesalt T bezeichnen und m sei wiederum eine beliebige ganze rationale Zahl $\gtreqless 0$. Die Gesamtheit aller Ausdrücke von der Gestalt S sehen wir als ein komplexes Zahlensystem $\Omega(s, t)$ an, in dem wir folgende Rechnungsregeln festsetzen: man rechne mit s und t, wie mit Parametern nach den Regeln 7—11 in § 13, während man an Stelle der Regel 12 stets die Formel

(1) $$ts = 2st$$

anwende.

Sind nun S', S'' irgend zwei Ausdrücke von der Gestalt S:

$$S' = s^{m'} T_0' + s^{m'+1} T_1' + s^{m'+2} T_2' + \cdots,$$
$$S'' = s^{m''} T_0'' + s^{m''+1} T_1'' + s^{m''+2} T_2'' + \cdots,$$

so kann man offenbar durch Zusammenfügung einen neuen Ausdruck $S' + S''$ bilden, der wiederum von der Gestalt S und zugleich eindeutig bestimmt ist; dieser Ausdruck $S' + S''$ heißt die Summe der durch S', S'' dargestellten Zahlen.

Durch gliedweise Multiplikation der beiden Ausdrücke S', S'' gelangen wir zunächst zu einem Ausdrucke von der Gestalt

$$S'S'' = s^{m'} T_0' s^{m''} T_0'' + (s^{m'} T_0' s^{m''+1} T_1'' + s^{m'+1} T_1' s^{m''} T_0'')$$
$$+ (s^{m'} T_0' s^{m''+2} T_2'' + s^{m'+1} T_1' s^{m''+1} T_1'' + s^{m'+2} T_2' s^{m''} T_0'') + \cdots.$$

Dieser Ausdruck wird bei Benutzung der Formel (1) offenbar ein eindeutig bestimmter Ausdruck von der Gestalt S; der letztere heiße das Produkt der durch S' dargestellten Zahl in die durch S'' dargestellte Zahl.

Bei der so festgesetzten Rechnungsweise leuchtet die Gültigkeit der Rechnungsregeln 1—5 in § 13 unmittelbar ein. Auch die Gültigkeit der Vorschrift 6 in § 13 ist nicht schwer einzusehen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es seien etwa

$$S' = s^{m'} T_0' + s^{m'+1} T_1' + s^{m'+2} T_2' + \cdots$$

und

$$S''' = s^{m'''} T_0''' + s^{m'''+1} T_1''' + s^{m'''+2} T_2''' + \cdots$$

gegebene Ausdrücke von der Gestalt S, und bedenken, daß unseren Festsetzungen entsprechend der erste Koeffizient r_0' aus T_0' von 0 verschieden sein muß. Indem wir nun die nämlichen Potenzen von s auf beiden Seiten einer Gleichung

(2) $$S'S'' = S'''$$

vergleichen, finden wir in eindeutig bestimmter Weise zunächst eine ganze Zahl m'' als Exponenten und sodann der Reihe nach gewisse Ausdrücke

$$T_0'', T_1'', T_2'', \ldots$$

derart, daß der Ausdruck

$$S'' = s^{m''} T_0'' + s^{m''+1} T_1'' + s^{m''+2} T_2'' + \cdots$$

bei Benutzung der Formel (1) der Gleichung (2) genügt; hiermit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Um endlich die Anordnung der Zahlen unseres Zahlensystems $\Omega(s, t)$ zu ermöglichen, treffen wir folgende Festsetzungen. Eine Zahl des Systems heiße $<$ oder > 0, je nachdem in dem Ausdrucke S, der sie darstellt, der erste Koeffizient r_0 von T_0 $<$ oder > 0 ausfällt. Sind irgend zwei Zahlen a und b des komplexen Zahlensystems vorgelegt, so heiße $a < b$ bez. $a > b$, je nachdem $a - b < 0$ oder > 0 wird. Es leuchtet unmittelbar ein, daß bei diesen Festsetzungen die Regeln 13—16 in § 13 gültig sind, d. h. $\Omega(s, t)$ ist ein Desarguesschen Zahlensystem (vgl. § 28).

Die Vorschrift 12 in § 13 ist, wie Gleichung (1) zeigt, für unser komplexes Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht erfüllt und damit ist die Richtigkeit des Satzes 39 vollständig erkannt.

In Übereinstimmung mit Satz 38 gilt der Archimedische Satz (Satz 17 in § 13) für das soeben aufgestellte Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht.

Es werde noch hervorgehoben, daß das Zahlensystem $\Omega(s, t)$ — ebenso wie die in § 9 und § 12 benutzten Zahlensysteme Ω und $\Omega(t)$ — nur eine abzählbare Menge von Zahlen enthält.

§ 34.

Beweis der beiden Sätze über den Pascalschen Satz. (Nicht-Pascalsche Geometrie.)

Wenn in einer räumlichen Geometrie die sämtlichen Axiome I, II, IV erfüllt sind, so gilt auch der Desarguessche Satz (Satz 33) und mithin ist nach Kapitel V § 24 bis § 26 in dieser Geometrie die Einführung einer Streckenrechnung möglich, für welche die Vorschriften 1—11, 13—16 in § 13 gültig sind. Setzen wir nun das Archimedische Axiom V in unserer Geometrie voraus, so gilt offenbar für die Streckenrechnung der Archimedische Satz (Satz 17 in § 13) und mithin nach Satz 38 auch das kommutative Gesetz der Multiplikation. Da aber die hier in Rede stehende in § 24 (Fig. S. 54) eingeführte Definition des Streckenproduktes mit der in § 15 (Fig. S. 32) angewandten Definition übereinstimmt, so bedeutet gemäß der in § 15 ausgeführten Konstruktion das kommutative Gesetz der Multiplikation zweier Strecken auch hier nichts anderes als den Pascalschen Satz. Damit ist die Richtigkeit des Satzes 36 erkannt.

Um den Satz 37 zu beweisen, fassen wir das in § 33 aufgestellte Desarguessche Zahlensystem $\Omega(s, t)$ ins Auge und konstruieren mit Hilfe desselben auf die in § 29 beschriebene Art eine räumliche Geometrie, in

der die sämtlichen Axiome I, II, IV erfüllt sind. Trotzdem gilt der Pascalsche Satz in dieser Geometrie nicht, da das kommutative Gesetz der Multiplikation in dem Desarguesschen Zahlensystem $\Omega(s, t)$ nicht besteht. Die so aufgebaute *„Nicht-Pascalsche“ Geometrie* ist in Übereinstimmung mit dem vorhin bewiesenen Satz 36 notwendig zugleich auch eine *„Nicht-Archimedische“ Geometrie.*

Es ist offenbar, daß der Pascalsche Satz sich bei unseren Annahmen auch dann nicht beweisen läßt, wenn man die räumliche Geometrie als einen Teil einer Geometrie von beliebig vielen Dimensionen auffaßt, in welcher neben den Punkten, Geraden und Ebenen noch weitere Elemente vorhanden sind und für diese ein entsprechendes System von Axiomen der Verknüpfung und Anordnung, sowie das Parallelenaxiom zu Grunde gelegt ist.

§ 35.

Beweis eines beliebigen Schnittpunktsatzes mittels des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes.

Ein jeder ebener Schnittpunktsatz hat notwendig diese Form: Man wähle zunächst ein System von Punkten und Geraden willkürlich, bez. mit der Bedingung, daß für gewisse von diesen Punkten und Geraden die vereinigte Lage vorgeschrieben ist; wenn man dann in bekannter Weise Verbindungsgerade und Schnittpunkte konstruiert, so gelangt man schließlich zu einem bestimmten System von Geraden, von denen der Satz aussagt, daß sie durch den nämlichen Punkt hindurchlaufen.

Es sei nun eine ebene Geometrie vorgelegt, in der sämtliche Axiome I 1—3, II—V gültig sind; nach Kap. III § 17 können wir dann vermittels eines rechtwinkligen Achsenkreuzes jedem Punkte ein Zahlenpaar (x, y) und jeder Geraden ein Verhältnis von drei Zahlen $(u : v : w)$ entsprechen lassen; hierbei sind x, y, u, v, w jedenfalls reelle Zahlen, von denen u, v nicht beide verschwinden, und die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Geraden

$$ux + vy + w = 0$$

bedeutet eine Gleichung im gewöhnlichen Sinne.

Andererseits dürfen wir, falls x, y, u, v, w insbesondere Zahlen des in § 9 konstruierten algebraischen Bereiches Ω sind und u, v nicht beide verschwinden, annehmen, daß umgekehrt das Zahlenpaar (x, y) und das Zahlentripel $(u : v : w)$ einen Punkt bez. eine Gerade in der vorgelegten Geometrie liefert.

Führen wir für alle Punkte und Geraden, die in einem beliebigen ebenen Schnittpunktsatze auftreten, die betreffenden Zahlenpaare und

Zahlentripel ein, so wird dieser Schnittpunktsatz aussagen, daß ein bestimmter, von gewissen Parametern $p_1, \ldots p_r$ rational abhängiger Ausdruck $A(p_1, \ldots, p_r)$ mit reellen Koeffizienten stets verschwindet, sobald wir für jene Parameter insbesondere irgend welche Zahlen des in § 9 betrachteten Bereiches Ω einsetzen. Wir schließen hieraus, daß der Ausdruck $A(p_1, \ldots, p_r)$ auch identisch auf Grund der Rechnungsgesetze 7—12 in § 13 verschwinden muß.

Da in der vorgelegten Geometrie nach § 22 der Desarguessche Satz gilt, so können wir gewiß auch die in § 24 eingeführte Streckenrechnung benutzen, und wegen der Gültigkeit des Pascalschen Satzes trifft für diese Streckenrechnung auch das kommutative Gesetz der Multiplikation zu, so daß in dieser Streckenrechnung sämtliche Rechnungsgesetze 7—12 in § 13 gültig sind.

Indem wir die Achsen des bisher benutzten Achsenkreuzes auch als Achsen dieser neuen Streckenrechnung gewählt und die Einheitspunkte E und E' geeignet festgesetzt denken, erkennen wir die Übereinstimmung der neuen Streckenrechnung mit der früheren Koordinatenrechnung.

Um in der neuen Streckenrechnung das identische Verschwinden des Ausdruckes $A(p_1, \ldots, p_r)$ nachzuweisen, genügt die Anwendung des Desarguesschen und Pascalschen Satzes und damit erkennen wir, daß jeder in der vorgelegten Geometrie geltende Schnittpunktsatz durch Konstruktion geeigneter Hilfspunkte und Hilfsgeraden sich stets als eine Kombination des Desarguesschen und Pascalschen Satzes herausstellen muß. Zum Nachweise der Richtigkeit des Schnittpunktsatzes brauchen wir also nicht auf die Kongruenzsätze zurückzugreifen.

Kapitel VII.

Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I—IV.

§ 36.

Die geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes.

Es sei eine räumliche Geometrie vorgelegt, in der die sämtlichen Axiome I—IV gelten; wir fassen der Einfachheit wegen in diesem Kapitel nur eine ebene Geometrie ins Auge, die in dieser räumlichen Geometrie enthalten ist, und untersuchen dann die Frage, welche elementaren Konstruktionsaufgaben in einer solchen Geometrie notwendig ausführbar sind.

Auf Grund der Axiome I ist die Ausführung der folgenden Aufgabe stets möglich:

Aufgabe 1. Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden, falls die Geraden nicht parallel sind.

Auf Grund der Axiome der Gruppe II werden keine neuen Aufgaben lösbar.

Auf Grund der Kongruenzaxiome III ist das Abtragen von Strecken und Winkeln möglich, d. h. es lassen sich in der vorgelegten Geometrie folgende Aufgaben lösen:

Aufgabe 2. Eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden von einem Punkte aus abzutragen.

Aufgabe 3. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade anzutragen oder eine Gerade zu konstruieren, die eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet.

Das Axiom IV ermöglicht die Ausführung der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 4. Durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

Wir sehen somit, daß unter Zugrundelegung der Axiome I—IV alle und nur diejenigen Konstruktionsaufgaben lösbar sind, die sich auf die eben genannten Aufgaben 1—4 zurückführen lassen.

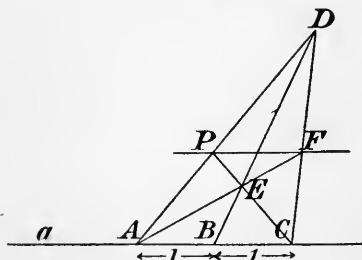
Wir fügen den fundamentalen Aufgaben 1—4 noch die folgende hinzu:

Aufgabe 5. Zu einer gegebenen Geraden eine Senkrechte zu ziehen.

Wir erkennen unmittelbar, daß diese Aufgabe 5 auf verschiedene Arten durch die Aufgaben 1—4 gelöst werden kann.

Zur Ausführung der Aufgabe 1 bedürfen wir des Lineals. Um die Aufgaben 2—5 auszuführen, genügt es, wie im Folgenden gezeigt wird, neben dem Lineal das Eichmaß anzuwenden, ein Instrument, welches das Abtragen einer einzigen bestimmten Strecke, etwa der Einheitsstrecke ermöglicht[1]). Wir gelangen damit zu folgendem Resultat:

Satz 40. *Diejenigen geometrischen Konstruktionsaufgaben, die unter Zugrundelegung der Axiome* I—IV *lösbar sind, lassen sich notwendig mittels Lineals und Eichmaßes ausführen.*

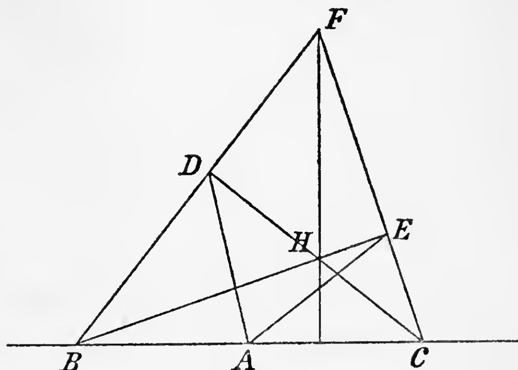


Beweis. Um die Aufgabe 4 auszuführen, verbinden wir den gegebenen Punkt P mit irgend einem Punkte A der gegebenen Geraden a und tragen von A aus auf a zweimal hintereinander mittels des Eichmaßes die Einheitsstrecke ab, etwa

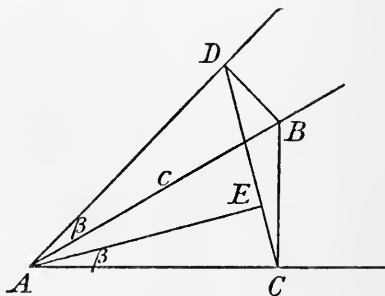
1) Diese Bemerkung ist von *J. Kürschák* gemacht worden; vgl. dessen Note „Das Streckenabtragen“ Math. Ann. Bd. 55. 1902.

bis B und C. Es sei nun D irgend ein Punkt auf AP, ferner E der Treffpunkt von CP und BD und endlich F der Treffpunkt von AE und CD: dann ist nach *Steiner* PF die gesuchte Parallele zu a.

Die Aufgabe 5 lösen wir auf folgende Weise. Es sei A ein beliebiger Punkt der gegebenen Geraden; dann tragen wir von A aus auf dieser Geraden nach beiden Seiten hin mittels des Eichmaßes die Einheitsstrecken AB und AC ab und bestimmen dann auf zwei beliebigen anderen durch A gehenden Geraden die Punkte E und D, so daß auch die Strecken AD und AE gleich der Einheitsstrecke werden. Die Geraden BD und CE mögen sich in F, die Geraden BE und CD in H schneiden: dann ist FH die gesuchte Senkrechte. In der Tat: die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BEC$ sind als Winkel im Halbkreise über BC Rechte und daher steht nach dem Satze vom Höhenschnittpunkt eines Dreieckes, den wir auf das Dreieck BCF anwenden, auch FH auf BC senkrecht.

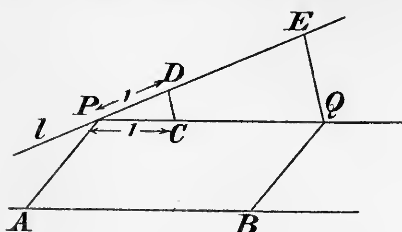


Wir können nunmehr leicht auch die Aufgabe 3 allein mittels Lineals und Eichmaßes lösen; wir schlagen etwa folgendes Verfahren ein, welches nur das Ziehen von Parallelen und das Fällen von Loten erfordert. Es sei β der abzutragende Winkel und A der Scheitel dieses Winkels. Wir ziehen die Gerade l (AC) durch A parallel zu der gegebenen Geraden, an welche der gegebene Winkel β angetragen werden soll. Von einem beliebigen Punkte B eines Schenkels von β fällen wir Lote auf den anderen Schenkel des Winkels β und auf l. Die Fußpunkte dieser Lote seien D und C. Das Fällen von Loten geschieht vermöge der Aufgaben 2 und 5. Sodann fällen wir von A eine Senkrechte auf CD, ihr Fußpunkt sei E. Nach dem in § 14 S. 27 ausgeführten Beweise ist $\sphericalangle CAE = \beta$; die Aufgabe 3 ist somit gelöst.



Um endlich die Aufgabe 2 auszuführen, benutzen wir die einfache von J. Kürschák angegebene Konstruktion: es sei AB die abzutragende Strecke und P der gegebene Punkt auf der gegebenen Geraden l. Man

ziehe durch P die Parallele zu AB und trage auf derselben mittels des Eichmaßes von P aus die Einheitsstrecke ab etwa bis C; ferner trage man auf l von P aus die Einheitsstrecke bis D ab. Die zu AP durch B gezogene Parallele treffe PC in Q und die durch Q zu CD gezogene Parallele treffe l in E: dann ist $PE = AB$.



Damit ist gezeigt, daß die Aufgaben 1—5 sämtlich durch Lineal und Eichmaß lösbar sind, und folglich der Satz 40 vollständig bewiesen.

§ 37.

Analytische Darstellung der Koordinaten konstruierbarer Punkte.

Außer den in § 36 behandelten elementargeometrischen Aufgaben gibt es noch eine große Reihe weiterer Aufgaben, zu deren Lösung man lediglich das Ziehen von Geraden und das Abtragen von Strecken nötig hat. Um den Bereich aller auf diese Weise lösbaren Aufgaben überblicken zu können, legen wir bei der weiteren Betrachtung ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde und denken uns die Koordinaten der Punkte in der üblichen Weise als reelle Zahlen oder Funktionen von gewissen willkürlichen Parametern. Um die Frage nach der Gesamtheit aller konstruierbaren Punkte zu beantworten, stellen wir folgende Überlegung an:

Es sei ein System von bestimmten Punkten gegeben; wir setzen aus den Koordinaten dieser Punkte einen Bereich R zusammen; derselbe enthält gewisse reelle Zahlen und gewisse willkürliche Parameter p. Nunmehr denken wir uns die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, die durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken aus dem vorgelegten System von Punkten konstruierbar sind. Der Bereich, der von den Koordinaten dieser Punkte gebildet wird, heiße $\Omega(R)$; derselbe enthält gewisse reelle Zahlen und Funktionen der willkürlichen Parameter p.

Unsere Betrachtungen in § 17 zeigen, daß das Ziehen von Geraden und Parallelen analytisch auf die Anwendung der Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division von Strecken hinausläuft; ferner lehrt die bekannte in § 9 aufgestellte Formel für die Drehung, daß das Abtragen von Strecken auf einer beliebigen Geraden keine andere analytische Operation erfordert, als die Quadratwurzel zu ziehen aus einer Summe von zwei Quadraten, deren Basen man bereits konstruiert hat. Umgekehrt kann man zufolge des Pythagoräischen Lehrsatzes vermöge eines rechtwinkligen Dreiecks

die Quadratwurzel aus der Summe zweier Streckenquadrate durch Abtragen von Strecken stets konstruieren.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß der Bereich $\Omega(R)$ alle diejenigen und nur solche reelle Zahlen und Funktionen der Parameter p enthält, die aus den Zahlen und Parametern in R vermöge einer endlichen Anzahl von Anwendungen von fünf Rechnungsoperationen hervorgehen, nämlich der vier elementaren Rechnungsoperationen und einer fünften Operation, als die man das Ziehen der Quadratwurzel aus einer Summe zweier Quadrate betrachtet. Wir sprechen dieses Resultat wie folgt aus:

Satz 41. Eine geometrische Konstruktionsaufgabe ist dann und nur dann durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken, d. h. mittels Lineals und Eichmaßes lösbar, wenn bei der analytischen Behandlung der Aufgabe die Koordinaten der gesuchten Punkte solche Funktionen der Koordinaten der gegebenen Punkte sind, deren Herstellung nur rationale Operationen und die Operation des Ziehens der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate und diese fünf Operationen in endlicher Anzahl erfordert.

Wir können aus diesem Satze sofort erkennen, daß nicht jede mittels Zirkels lösbare Aufgabe auch allein mittels Lineals und Eichmaßes gelöst werden kann. Zu dem Zwecke legen wir diejenige Geometrie zu Grunde, die in § 9 mit Hilfe des algebraischen Zahlenbereichs Ω aufgebaut worden ist; in dieser Geometrie gibt es lediglich solche Strecken, die mittels Lineals und Eichmaßes konstruierbar sind, nämlich die durch Zahlen des Bereiches Ω bestimmten Strecken.

Ist nun ω irgend eine Zahl in Ω, so erkennen wir aus der Definition des Bereiches Ω leicht, daß auch jede zu ω konjugierte algebraische Zahl in Ω liegen muß, und da die Zahlen des Bereichs Ω offenbar sämtlich reell sind, so folgt hieraus, daß der Bereich Ω nur solche reelle algebraische Zahlen enthalten kann, deren Konjugierte ebenfalls reell sind.

Wir stellen jetzt die Aufgabe, ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse 1 und einer Kathete $|\sqrt{2}|-1$ zu konstruieren. Nun kommt die algebraische Zahl $\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}$, die den Zahlenwert der anderen Kathete ausdrückt, im Zahlenbereich Ω nicht vor, da die zu ihr konjugierte Zahl $\sqrt{-2|\sqrt{2}|-2}$ imaginär ausfällt. Die gestellte Aufgabe ist mithin in der zu Grunde gelegten Geometrie nicht lösbar und kann daher überhaupt nicht mittels Lineals und Eichmaßes lösbar sein, obwohl die Konstruktion mittels des Zirkels sofort ausführbar ist

§ 38.

Die Darstellung algebraischer Zahlen und ganzer rationaler Funktionen als Summe von Quadraten.

Die Frage nach der Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes erfordert zu ihrer weiteren Behandlung einige Sätze zahlentheoretischen und algebraischen Charakters, die, wie mir scheint, auch an sich von Interesse sind.

Nach *Fermat* ist bekanntlich jede ganze rationale positive Zahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellbar. Dieser Fermatsche Satz gestattet eine merkwürdige Verallgemeinerung von folgender Art:

Erklärung. Es sei k ein beliebiger Zahlkörper; der Grad dieses Körpers k heiße m, und die $m-1$ zu k konjugierten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Trifft es sich, daß unter den m Körpern $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ einer oder mehrere aus lauter reellen Zahlen gebildet sind, so nennen wir diese Körper selbst reell; es seien diese Körper etwa $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$. Eine Zahl α des Körpers k heiße in diesem Falle *total positiv in* k, falls die s zu α konjugierten bez. in $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Zahlen sämtlich positiv sind. Kommen dagegen in jedem der m Körper $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ auch imaginäre Zahlen vor, so heiße eine jede Zahl α in k stets *total positiv*.

Satz 42. *Jede total positive Zahl in k läßt sich als Summe von vier Quadraten darstellen, deren Basen ganze oder gebrochene Zahlen des Körpers k sind.*

Der Beweis dieses Satzes bietet erhebliche Schwierigkeiten dar; er beruht wesentlich auf der Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, die ich unlängst in mehreren Arbeiten[1]) entwickelt habe. Es sei hier nur auf denjenigen Satz aus dieser Theorie hingewiesen, der die Bedingungen für die Lösbarkeit einer ternären Diophantischen Gleichung von der Gestalt

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 = 0$$

angibt, worin die Koeffizienten α, β, γ gegebene Zahlen in k und ξ, η, ζ gesuchte Zahlen in k bedeuten. Der Beweis des Satzes 42 wird durch wiederholte Anwendung des eben genannten Satzes erbracht.

Aus dem Satze 42 folgen eine Reihe von Sätzen über die Darstellung solcher rationaler Funktionen einer Veränderlichen mit rationalen Koeffizienten, die niemals negative Werte haben.

---

1) Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung Bd. 6, 1899 und Math. Ann. Bd. 51; ferner: Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1898 und Acta mathematica Bd. 26.

Erwähnt sei noch folgender Satz, der uns im nächsten Paragraphen von Nutzen sein wird.

Satz 43. Es bedeute $f(x)$ eine solche ganze rationale Funktion von x mit rationalen Zahlenkoeffizienten, die niemals negative Werte annimmt, wenn man für x beliebige reelle Werte einsetzt: dann läßt sich $f(x)$ stets als Summe von Quadraten darstellen, so daß die sämtlichen Basen dieser Quadrate ganze rationale Funktionen von x mit rationalen Koeffizienten sind[1]).

Es dürfte sehr schwierig sein, die entsprechenden Tatsachen für ganze rationale Funktionen von zwei oder mehr Veränderlichen aufzustellen und zu beweisen, doch sei hier darauf hingewiesen, daß die Darstellbarkeit einer beliebigen definitiven ganzen rationalen Funktion zweier Veränderlicher als Quotient von Quadratsummen ganzer Funktionen auf einem völlig anderen Wege von mir bewiesen worden ist — unter der Voraussetzung, daß für die darstellenden Funktionen nicht bloß rationale, sondern beliebige reelle Koeffizienten zulässig sind[2]).

§ 39.

Kriterium für die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes.

Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt, die mittels des Zirkels ausführbar ist; wir wollen dann ein Kriterium aufzustellen versuchen, welches unmittelbar aus der analytischen Natur der Aufgabe und ihrer Lösungen beurteilen läßt, ob die Konstruktion auch allein mittels Lineals und Eichmaßes ausführbar ist. Wir werden bei dieser Untersuchung auf den folgenden Satz geführt:

Satz 44. *Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt von der Art, daß man bei analytischer Behandlung derselben die Koordinaten der gesuchten Punkte aus den Koordinaten der gegebenen Punkte lediglich durch rationale Operationen und durch Ziehen von Quadratwurzeln finden kann; es sei n die kleinste Anzahl der Quadratwurzeln, die hierbei zur Berechnung der Koordinaten der Punkte ausreichen: soll dann die vorgelegte Konstruktionsaufgabe sich auch allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen lassen, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß die geometrische Aufgabe genau 2^n reelle Lösungen besitzt und zwar für alle Lagen der gegebenen Punkte, d. h. für alle Werte*

1) Der Beweis für die Darstellbarkeit von $f(x)$ als Quotient zweier Quadratsummen ist von mir auf Grund des Satzes 42 in der ersten Auflage ausgeführt worden. Inzwischen ist es *E. Landau* gelungen, den Beweis für die Darstellbarkeit von $f(x)$ direkt als Quadratsumme, wie oben behauptet, zu erbringen und zwar lediglich mit Benutzung sehr einfacher und elementarer Hilfsmittel. Math. Ann. Bd. 57 1903.

2) Über ternäre definite Formen, Acta Mathematica Bd. 17.

der in den Koordinaten der gegebenen Punkte auftretenden willkürlichen Parameter.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz 44 ausschließlich für den Fall, daß die Koordinaten der gegebenen Punkte rationale Funktionen eines Parameters p mit rationalen Koeffizienten sind.

Die Notwendigkeit des aufgestellten Kriteriums leuchtet aus § 37 ein. Um zu zeigen, daß dasselbe auch hinreicht, setzen wir dieses Kriterium als erfüllt voraus und betrachten zunächst eine solche von jenen n Quadratwurzeln, die bei der Berechnung der Koordinaten der gesuchten Punkte zuerst zu suchen ist. Der Ausdruck unter dieser Quadratwurzel ist eine rationale Funktion $f_1(p)$ des Parameters p mit rationalen Koeffizienten; diese rationale Funktion darf für beliebige reelle Parameterwerte p niemals negative Werte annehmen, da sonst entgegen der Voraussetzung die vorgelegte Aufgabe für gewisse Werte p imaginäre Lösungen haben müßte Aus Satz 43 schließen wir daher, daß $f_1(p)$ als Quotient von Summen von Quadraten ganzer rationaler Funktionen darstellbar ist.

Nunmehr zeigen die Formeln

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + d^2}.$$

. . . .

daß allgemein das Ziehen der Quadratwurzel aus einer Summe von beliebig vielen Quadraten sich stets zurückführen läßt auf wiederholtes Ziehen der Quadratwurzel aus der Summe zweier Quadrate.

Nehmen wir diese Bemerkung mit dem vorigen Ergebnisse zusammen, so erkennen wir, daß der Ausdruck $\sqrt{f_1(p)}$ gewiß mittels Lineals und Eichmaßes konstruiert werden kann.

Wir betrachten ferner eine solche von den n Quadratwurzeln, die bei der Berechnung der Koordinaten der gesuchten Punkte an zweiter Stelle zu ziehen ist. Der Ausdruck unter dieser Quadratwurzel ist eine rationale Funktion $f_2\left(p, \sqrt{f_1}\right)$ des Parameters p und der zuerst betrachteten Quadratwurzel; auch diese Funktion f_2 ist bei beliebigen reellen Parameterwerten p und für jedes Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ niemals negativer Werte fähig, da sonst entgegen der Voraussetzung die vorgelegte Aufgabe unter ihren 2^n Lösungen für gewisse Werte p auch imaginäre Lösungen haben müßte. Aus diesem Umstande folgt, daß f_2 einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$f_2^2 - \varphi_1(p) f_2 + \psi_1(p) = 0$$

genügen muß, worin $\varphi_1(p)$ und $\psi_1(p)$ notwendig solche rationale Funktionen von p mit rationalen Koeffizienten sind, die für reelle Werte von p

niemals negative Werte besitzen. Aus der letzteren quadratischen Gleichung entnehmen wir

$$f_2 = \frac{f_2{}^2 + \psi_1(p)}{\varphi_1(p)}.$$

Nun müssen wiederum nach Satz 43 die Funktionen $\varphi_1(p)$ und $\psi_1(p)$ Quotienten von Summen von Quadraten rationaler Funktionen sein und andererseits ist nach dem vorigen der Ausdruck f_2 mittels Lineals und Eichmaßes konstruierbar; der gefundene Ausdruck für f_2 zeigt somit, daß f_2 ein Quotient von Summen von Quadraten konstruierbarer Funktionen ist. Also läßt sich auch der Ausdruck $\sqrt{f_2}$ mittels Lineals und Eichmaßes konstruieren.

Ebenso wie der Ausdruck f_2 erweist sich auch jede andere rationale Funktion $\varphi_2(p, \sqrt{f_1})$ von p und $\sqrt{f_1}$ als Quotient zweier Summen von Quadraten konstruierbarer Funktionen, sobald diese rationale Funktion φ_2 die Eigenschaft besitzt, niemals negative Werte anzunehmen bei reellem Parameter p und für beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$.

Diese Bemerkung gestattet uns, das eben begonnene Schlußverfahren in folgender Weise fortzusetzen.

Es sei $f_3(p, \sqrt{f_1}, \sqrt{f_2})$ ein solcher Ausdruck, der von den drei Argumenten $p, \sqrt{f_1}, \sqrt{f_2}$ in rationaler Weise abhängt und aus dem bei der analytischen Berechnung der Koordinaten der gesuchten Punkte an dritter Stelle die Quadratwurzel zu ziehen ist. Wie vorhin schließen wir, daß f_3 bei beliebigen reellen Werten p und für beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ und $\sqrt{f_2}$ niemals negative Werte annehmen darf; dieser Umstand wiederum zeigt, daß f_3 einer quadratischen Gleichung von der Gestalt

$$f_3{}^2 - \varphi_2(p, \sqrt{f_1})\, f_3 + \psi_2(p, \sqrt{f_1}) = 0$$

genügen muß, worin φ_2 und ψ_2 solche rationale Funktionen von p und $\sqrt{f_1}$ bedeuten, die für reelle Werte p und beiderlei Vorzeichen von $\sqrt{f_1}$ negativer Werte nicht fähig sind. Da mithin φ_2 und ψ_2 nach der vorigen Bemerkung Quotienten zweier Summen von Quadraten konstruierbarer Ausdrücke sind, so folgt das gleiche auch für den Ausdruck

$$f_3 = \frac{f_3{}^2 + \psi_2(p, \sqrt{f_1})}{\varphi_2(p, \sqrt{f_1})}$$

und mithin ist auch $\sqrt{f_3}$ mittels Lineals und Eichmaßes konstruierbar.

Die Fortsetzung dieser Schlußweise führt zum Beweise des Satzes 44 in dem betrachteten Falle eines Parameters p.

Die allgemeine Richtigkeit des Satzes 44 hängt davon ab, ob der Satz 43 in entsprechender Weise sich auf den Fall mehrerer Veränderlicher verallgemeinern läßt.

Als Beispiel für die Anwendung des Satzes 44 mögen die regulären mittels Zirkels konstruierbaren Polygone dienen; in diesem Falle kommt ein willkürlicher Parameter p nicht vor, sondern die zu konstruierenden Ausdrücke stellen sämtlich algebraische Zahlen dar. Man sieht leicht, daß das Kriterium des Satzes 44 erfüllt ist, und somit ergibt sich, daß man jene regulären Polygone auch allein mittels Ziehens von Geraden und Abtragens von Strecken konstruieren kann — ein Resultat, welches sich auch aus der Theorie der Kreisteilung direkt entnehmen läßt.

Was weitere aus der Elementargeometrie bekannte Konstruktionsaufgaben anbetrifft, so sei hier nur erwähnt, daß das Malfattische Problem, nicht aber die Appollonische Berührungsaufgabe allein mittels Lineals und Eichmaßes gelöst werden kann[1]).

Schlußwort.

Die vorstehende Abhandlung ist eine kritische Untersuchung der Prinzipien der Geometrie; in dieser Untersuchung leitete uns der Grundsatz, eine jede sich darbietende Frage in der Weise zu erörtern, daß wir zugleich prüften, ob ihre Beantwortung auf einem vorgeschriebenen Wege mit gewissen eingeschränkten Hilfsmitteln möglich oder nicht möglich ist. Dieser Grundsatz scheint mir eine allgemeine und naturgemäße Vorschrift zu enthalten; in der Tat wird, wenn wir bei unseren mathematischen Betrachtungen einem Probleme begegnen oder einen Satz vermuten, unser Erkenntnistrieb erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung jenes Problems und der strenge Beweis dieses Satzes gelingt oder wenn der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Mißlingens von uns klar erkannt worden ist.

So spielt denn in der neueren Mathematik die Frage nach der Unmöglichkeit gewisser Lösungen oder Aufgaben eine hervorragende Rolle und das Bestreben, eine Frage solcher Art zu beantworten, war oftmals der Anlaß zur Entdeckung neuer und fruchtbarer Forschungsgebiete. Wir erinnern nur an *Abels* Beweis für die Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch Wurzelziehen, ferner an die Erkenntnis der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms und an *Hermites* und *Lindemanns*

---

1) Betreffs weiterer geometrischer Konstruktionen mittels Lineals und Eichmaßes vgl. *M. Feldblum,* Über elementargeometrische Konstruktionen, Inauguraldissertation, Göttingen 1899.

Sätze von der Unmöglichkeit, die Zahlen e und π auf algebraischem Wege zu konstruieren.

Der Grundsatz, demzufolge man überall die Prinzipien der Möglichkeit der Beweise erörtern soll, hängt auch aufs engste mit der Forderung der „Reinheit" der Beweismethoden zusammen, die von mehreren Mathematikern der neueren Zeit mit Nachdruck erhoben worden ist. Diese Forderung ist im Grunde nichts anderes als eine subjektive Fassung des hier befolgten Grundsatzes. In der Tat sucht die vorstehende geometrische Untersuchung allgemein darüber Aufschluß zu geben, welche Axiome, Voraussetzungen oder Hilfsmittel zum Beweise einer elementar-geometrischen Wahrheit nötig sind, und es bleibt dann dem jedesmaligen Ermessen anheim gestellt, welche Beweismethode von dem gerade eingenommenen Standpunkte aus zu bevorzugen ist.

Anhang I.

Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte[1]).

Aus Math. Ann. Bd. 46.

(Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe.)

Nehmen wir die Punkte, die Geraden und die Ebenen als Elemente, so können zur Begründung der Geometrie die folgenden Axiome dienen:

1. Die Axiome, welche die Verknüpfung dieser Elemente untereinander betreffen; kurz zusammengefaßt, lauten dieselben wie folgt:

Irgend zwei Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade a. — Irgend drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte A, B, C bestimmen eine Ebene α. — Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt die Gerade a vollständig in der Ebene α. — Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein. — Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte, und im Raume gibt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte. —

2. Die Axiome, durch welche der Begriff der Strecke und der Begriff der Reihenfolge von Punkten einer Geraden

---

1) Betreffs allgemeinerer Formulierung dieses Problems vgl. meinen auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris 1900 gehaltenen Vortrag: Mathematische Probleme. Göttinger Nachr. 1900 Nr. 4, sowie G. Hamel, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1901 und dessen Abhandlung: Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind, Math. Ann. Bd. 57 1903.

eingeführt wird. Diese Axiome sind von M. Pasch[1]) zuerst aufgestellt und systematisch untersucht worden; dieselben sind im wesentlichen folgende:

Zwischen zwei Punkten A, B einer Geraden gibt es stets wenigstens einen dritten Punkt C der Geraden. — Unter drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, welcher zwischen den beiden anderen liegt. — Wenn A, B auf der Geraden a liegen, so gibt es stets einen Punkt C der nämlichen Geraden a, so daß B zwischen A und C liegt. — Irgend vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 einer Geraden a können stets in der Weise angeordnet werden, daß allgemein A_i zwischen A_h und A_k liegt, sobald der Index h kleiner und k größer als i ist. — Jede Gerade a, welche in einer Ebene α liegt, trennt die Punkte dieser Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt A' des anderen Gebietes zusammen eine Strecke AA', innerhalb welcher ein Punkt der Geraden a liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und B des nämlichen Gebietes eine Strecke AB, welche keinen Punkt der Geraden a enthält.

3. Das Axiom der Stetigkeit, welchem ich folgende Fassung gebe:

Wenn $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten einer Geraden a sind und B ein weiterer Punkt auf a ist, von der Art, daß allgemein A_i zwischen A_h und B liegt, sobald der Index h kleiner als i ist, so gibt es einen Punkt C, welcher folgende Eigenschaft besitzt: sämtliche Punkte der unendlichen Reihe $A_2, A_3, A_4, \ldots$ liegen zwischen A_1 und C und jeder andere Punkt C', für welchen dies ebenfalls zutrifft, liegt zwischen C und B.

Auf diese Axiome läßt sich in vollkommener Strenge die Theorie der harmonischen Punkte gründen, und wenn wir uns derselben in ähnlicher Weise bedienen, wie dies F. Lindemann[2]) tut, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Jedem Punkte kann man drei endliche reelle Zahlen x, y, z und jeder Ebene eine lineare Relation zwischen diesen drei Zahlen x, y, z zuordnen, derart, daß alle Punkte, für welche die drei Zahlen x, y, z die lineare Relation erfüllen, in der betreffenden Ebene liegen und daß umgekehrt allen in dieser Ebene gelegenen Punkten Zahlen x, y, z entsprechen, welche der linearen Relation genügen. Werden ferner x, y, z als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im gewöhnlichen Euklidischen Raume gedeutet, so entsprechen den Punkten des ursprünglichen Raumes Punkte im Inneren eines gewissen nirgends konkaven

1) Vgl. Vorlesungen über neuere Geometrie. Teubner 1882.

2) Vgl. Vorlesungen über Geometrie Bd. II. Teil 1; S. 433 u. f.

Körpers des Euklidischen Raumes und umgekehrt entsprechen allen Punkten im Inneren dieses nirgends konkaven Körpers Punkte unseres ursprünglichen Raumes: *unser ursprünglicher Raum ist mithin auf das Innere eines nirgends konkaven Körpers des Euklidischen Raumes abgebildet.*

Hierbei ist unter einem nirgends konkaven Körper ein Körper von der Beschaffenheit verstanden, daß, wenn man zwei im Inneren des Körpers gelegene Punkte miteinander durch eine Gerade verbindet, der zwischen diesen beiden Punkten gelegene Teil der Geraden ganz in das Innere des Körpers fällt. Ich erlaube mir, Sie darauf aufmerksam zu machen, daß diesen hier auftretenden nirgends konkaven Körpern auch in den zahlentheoretischen Untersuchungen von H. Minkowski[1]) eine wichtige Rolle zukommt, und daß H. Minkowski für dieselben eine einfache analytische Definition gefunden hat.

Wenn umgekehrt im Euklidischen Raume ein beliebiger nirgends konkaver Körper gegeben ist, so definiert derselbe eine bestimmte Geometrie, in welcher die genannten Axiome sämtlich gültig sind: jedem Punkt im Inneren des nirgends konkaven Körpers entspricht ein Punkt in jener Geometrie; jeder durch das Innere des Körpers gehenden Geraden und Ebene des Euklidischen Raumes entspricht eine Gerade bezüglich Ebene der allgemeinen Geometrie; den auf der Grenze oder außerhalb des nirgends konkaven Körpers gelegenen Punkten und den ganz außerhalb des Körpers verlaufenden Geraden und Ebenen des Euklidischen Raumes entsprechen keine Elemente der allgemeinen Geometrie. Der obige Satz über die Abbildung der Punkte in der allgemeinen Geometrie auf das Innere des nirgends konkaven Körpers im Euklidischen Raume drückt somit eine Eigenschaft der Elemente der allgemeinen Geometrie aus, welche inhaltlich mit den anfangs aufgestellten Axiomen vollkommen gleichbedeutend ist.

Wir definieren nun den Begriff der Länge einer Strecke AB in unserer allgemeinen Geometrie und bezeichnen zu dem Zwecke diejenigen beiden Punkte des Euklidischen Raumes, welche den Punkten A und B des ursprünglichen Raumes entsprechen, ebenfalls mit A und B; wir verlängern dann die Gerade AB im Euklidischen Raume über A und B hinaus, bis dieselbe die Begrenzung des nirgends konkaven Körpers in den Punkten X bezüglich Y trifft, und bezeichnen allgemein die Euklidische Entfernung zwischen irgend zwei Punkten P und Q des Euklidischen Raumes kurz mit $\overline{PQ}$; dann heiße der reelle Wert

$$\widehat{AB} = l\left\{\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right\}$$

1) Vgl. Geometrie der Zahlen. Teubner 1896.

die *Länge* der Strecke AB in unserer allgemeinen Geometrie. Wegen

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} > 1, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} > 1$$

ist diese Länge stets eine positive Größe.

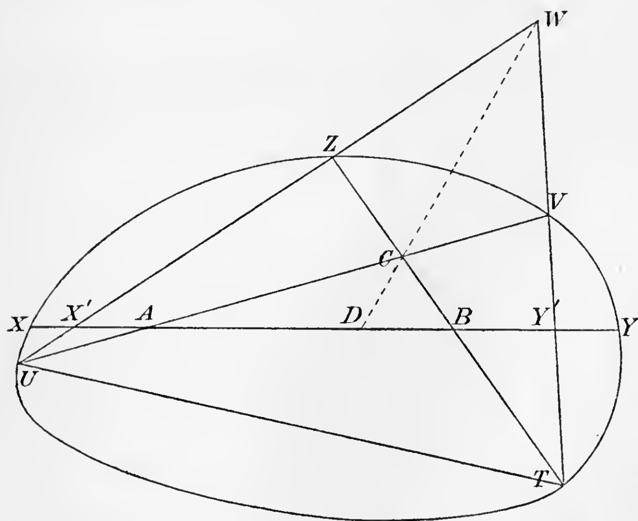
Es lassen sich leicht die Eigenschaften des Begriffs der Länge aufzählen, welche mit Notwendigkeit auf einen Ausdruck der angegebenen Art für $\widehat{AB}$ führen; doch unterlasse ich dies, damit ich durch diesen Brief nicht allzusehr Ihre Aufmerksamkeit ermüde.

Die aufgestellte Formel für $\widehat{AB}$ lehrt zugleich, in welcher Weise diese Größe von der Gestalt des nirgends konkaven Körpers abhängt. Halten wir nämlich die Punkte A und B im Inneren des Körpers fest und ändern nur die Begrenzung des Körpers derart, daß der Grenzpunkt X sich nach A hinbewegt und Y sich dem Punkte B nähert, so ist klar, daß jeder der beiden Quotienten

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

und folglich auch der Wert von $\widehat{AB}$ sich vergrößert.

Es sei jetzt im Inneren des nirgends konkaven Körpers ein Dreieck ABC gegeben. Die Ebene α desselben schneidet aus dem Körper ein nirgends konkaves Oval aus. Wir denken uns ferner jede der drei Seiten AB, AC, BC des Dreieckes über beide Endpunkte hinaus verlängert, bis sie die Begrenzung des Ovals bezüglich in den Punkten X und Y, U und V, T und Z schneiden; dann konstruieren wir die geraden Verbindungslinien UZ und TV und verlängern dieselben bis zu ihrem Durchschnitt W; ihre Schnittpunkte mit der Geraden XY bezeichnen wir mit X' bezüglich Y'. Wir legen nunmehr statt des ursprünglichen nirgends konkaven Ovals in der Ebene α das Dreieck UWT zu Grunde und erkennen leicht, daß in der durch



dieses Dreieck bestimmten ebenen Geometrie die Längen $\widehat{AC}$ und $\widehat{BC}$ die gleichen sind, wie in der ursprünglichen Geometrie, während die Länge der Seite AB durch die vorgenommene Änderung vergrößert worden ist. Wir bezeichnen die neue Länge der Seite AB zum Unterschiede von der ursprünglichen Länge $\widehat{AB}$ mit $\widehat{\widehat{AB}}$; dann ist $\widehat{\widehat{AB}} > \widehat{AB}$.

Es gilt nun für die Längen der Seiten des Dreiecks ABC die einfache Beziehung

$$\widehat{\widehat{AB}} = \widehat{AC} + \widehat{BC}.$$

Zum Beweise verbinden wir W mit C und verlängern diese Gerade bis zum Durchschnitt D mit AB. Nach dem bekannten Satze vom Doppelverhältnis ist dann wegen der perspektiven Lage der beiden Punktreihen X', A, D, Y' und U, A, C, V

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}} \frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} \frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}$$

und wegen der perspektiven Lage der beiden Punktreihen Y', B, D, X' und T, B, C, Z ist

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}} \frac{\overline{Y'D}}{\overline{Y'B}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.$$

Die Multiplikation beider Gleichungen ergibt

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}} \frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} \frac{\overline{UC}}{\overline{UA}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}$$

und diese neue Gleichung beweist meine Behauptung.

Aus obiger Untersuchung erkennen Sie, daß lediglich auf Grund der zu Anfang meines Briefes aufgezählten Axiome und der aus den einfachsten Eigenschaften des Längenbegriffs sich mit Notwendigkeit ergebenden Definition der Länge der allgemeine Satz gilt:

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer oder gleich der dritten Seite.

Zugleich ist klar, daß der Fall der Gleichheit dann und nur dann vorkommt, wenn die Ebene α aus der Begrenzung des nirgends konkaven Körpers zwei g e r a d e Linienstücke UZ und TV ausschneidet. Die letztere Bedingung läßt sich auch ohne Zuhilfenahme des nirgends konkaven Körpers ausdrücken. Sind nämlich irgend zwei in einer Ebene α gelegene und in irgend einem Punkte C sich schneidende Geraden a und b der ursprünglichen Geometrie gegeben, so werden im allgemeinen in jedem der vier in α um C herum entstehenden ebenen Winkelräume solche gerade Linien vorhanden sein, welche keine der beiden Geraden a und b schneiden; sind jedoch insbesondere in zwei sich gegenüberliegenden

ebenen Winkelräumen keine solchen geraden Linien vorhanden, so ist die fragliche Bedingung erfüllt, und *es gibt dann stets Dreiecke, für welche die Summe zweier Seiten gleich der dritten ist.* In dem betrachteten Falle ist also zwischen gewissen Punkten A und B ein aus zwei geradlinigen Stücken zusammengesetzter Weg möglich, dessen Gesamtlänge gleich der direkten Entfernung der beiden Punkte A und B ist; es läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen, daß *alle Wege zwischen den beiden Punkten A und B von derselben Eigenschaft sich aus den konstruierten Wegen zusammensetzen lassen und daß die übrigen Verbindungswege von größerer Gesamtlänge sind.* Die nähere Untersuchung dieser Frage nach den kürzesten Wegen ist leicht ausführbar und bietet ein besonderes Interesse in dem Falle, daß für die Begrenzung des nirgends konkaven Körpers ein Tetraeder zu Grunde gelegt wird.

Zum Schluß erlaube ich mir darauf hinzuweisen, daß ich bei der vorstehenden Entwickelung stets den nirgends konkaven Körper als ganz im Endlichen gelegen angenommen habe. Wenn jedoch in der durch die ursprünglichen Axiome definierten Geometrie eine Gerade und ein Punkt vorhanden ist von der Eigenschaft, daß durch diesen Punkt zu der Geraden nur eine einzige Parallele möglich ist, so ist jene Annahme nicht gerechtfertigt. Es wird leicht erkannt, welche Abänderungen meine Betrachtung dann zu erfahren hat.

Kleinteich bei Ostseebad Rauschen, den 14. August 1894.

Anhang II.

Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

[*Mit Zusätzen abgedruckt aus den Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXXV, Nos.* 793, 794.]

Unter der *axiomatischen* Erforschung einer mathematischen Wahrheit verstehe ich eine Untersuchung, welche nicht dahin zielt, im Zusammenhange mit jener Wahrheit neue oder allgemeinere Sätze zu entdecken, sondern die vielmehr die Stellung jenes Satzes innerhalb des Systems der bekannten Wahrheiten und ihren logischen Zusammenhang in der Weise klarzulegen sucht, daß sich sicher angeben läßt, welche Voraussetzungen zur Begründung jener Wahrheit notwendig und hinreichend sind.

So habe ich beispielsweise in meiner Festschrift *Grundlagen der Geometrie* Kap. V und VI (S. 47—73) die ebenen Schnittpunktsätze, nämlich

den speziellen Pascalschen Satz für das Geradenpaar und den Desarguesschen Satz von den perspektiv liegenden Dreiecken einer axiomatischen Untersuchung unterworfen, und in gleicher Weise haben auf meine Anregung hin *M. Dehn*[1]) den Satz von der Winkelsumme im Dreieck und *G. Hamel*[2]) den Satz von der Geraden als der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten behandelt.

Die vorliegende Note betrifft die Stellung des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck in der ebenen Euklidischen Geometrie. Zur Erleichterung des Verständnisses stelle ich — im wesentlichen wie in meinen *Grundlagen der Geometrie* — die Axiome der ebenen Euklidischen Geometrie zusammen wie folgt:

I. Axiome der Verknüpfung.

I 1. Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade.

I 2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I 3. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.

II. Axiome der Anordnung.

II 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt auch B zwischen C und A.

II 2. Wenn A und B zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es wenigstens einen Punkt C, der zwischen A und B liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß B zwischen A und D liegt.

II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Definition. — Die zwischen zwei Punkten A und B gelegenen Punkte heißen auch die Punkte der Strecke AB.

II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft; wenn dann diese Gerade durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke BC oder der Strecke AC oder BA.

---

1) *Mathematische Annalen*, Bd. LIII, 1900.

2) Inaugural-Dissertation, Göttingen 1901, und dessen Abhandlung: Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind, Math. Ann. Bd. 57, 1903.

III. Axiome der Kongruenz.

III 1. Wenn A, B zwei Punkte der Geraden a sind, und A' ein Punkt einer Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Hälfte der Geraden a' von A' aus stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist; in Zeichen

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets:

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad AB \equiv BA.$$

III 2. Wenn die Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent.

III 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf a, und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf einer Geraden a'; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \quad \text{und} \quad BC \equiv B'C',$$

ist, so ist auch stets:

$$AC \equiv A'C'.$$

Definition. — Ein von einem Punkte ausgehendes Paar von Halbstrahlen h, k nennen wir einen Winkel und bezeichnen ihn entweder mit $\sphericalangle (h, k)$ oder $\sphericalangle (k, h)$.

III 4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle (h, k)$, eine Gerade a', und eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es einen und nur einen Halbstrahl k', so daß

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$$

ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle (h', k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen. Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h.

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k) \quad \text{und} \quad \sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (k, h).$$

III 5. Wenn ein Winkel $\sphericalangle (h, k)$ sowohl dem Winkel $\sphericalangle (h', k')$ als auch dem Winkel $\sphericalangle (h'', k'')$ kongruent ist, so ist auch der Winkel $\sphericalangle (h', k')$ dem Winkel $\sphericalangle (h'', k'')$ kongruent.

III 6*. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so gilt auch stets

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Es ist nun für die nachfolgende Untersuchung wesentlich, dem letzten Kongruenzaxiom, nämlich dem Axiom III 6* über die Dreieckskongruenz eine engere Fassung zu erteilen, indem wir die Aussage desselben nur für Dreiecke mit gleichem Umlaufssinn als gültig hinstellen. Um diesen einschränkenden Zusatz scharf zu formulieren, nehmen wir irgend eine durch zwei Punkte A, B bestimmte Gerade in der Ebene beliebig an, und bezeichnen eine der beiden Halbebenen, in die diese Gerade die Ebene teilt, als rechts von der Geraden AB in der Richtung von A nach B, und dieselbe Halbebene zugleich auch als links von BA in der Richtung von B nach A; die andere Halbebene bezeichnen wir als links von der Geraden AB, und zugleich als rechts von der Geraden BA gelegen. Ist nun C irgend ein Punkt auf der rechten Halbebene von AB, so bezeichnen wir diejenige Halbebene von AC, auf welcher der Punkt B liegt, als die linke Halbebene von AC. Auf diese Weise können wir durch analoge Festsetzungen schließlich in eindeutig bestimmter Weise für jede Gerade angeben, welche Halbebene rechts oder links von dieser Geraden in gegebener Richtung gelegen ist. Zugleich wird von den Schenkeln irgend eines Winkels in eindeutig bestimmter Weise stets der eine als der rechte Schenkel und der andere als der linke Schenkel zu bezeichnen sein, nämlich so, daß der rechte Schenkel auf der rechten Halbebene von derjenigen Geraden liegt, die durch den anderen Schenkel nach Lage und Richtung bestimmt ist, während der linke Schenkel links von derjenigen Geraden liegt, die durch den ersteren Schenkel nach Lage und Richtung bestimmt ist.

Stellen wir nun die Aussage des Axioms III 6* nur dann als gültig hin, wenn in den beiden Dreiecken die Seiten AB und $A'B'$ bez. AC und $A'C'$ zugleich die rechten bez. die linken Schenkel der Winkel BAC und $B'A'C'$ sind, so erhalten wir jenes Axiom in der folgenden engeren Fassung:

III 6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so gilt auch stets

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B',$$

vorausgesetzt, daß AB und $A'B'$ die rechten Schenkel, AC und $A'C'$ die linken Schenkel der Winkel BAC bez. $B'A'C'$ sind.

Das letzte Axiom in seiner ursprünglichen weiteren Fassung III 6* hat sofort den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck zur Folge. Auch ist leicht zu erkennen, daß umgekehrt mit Hilfe dieses Satzes vom gleichschenkligen Dreieck aus jenem Kongruenzaxiom

in der engeren Fassung III 6 und den vorangehenden Axiomen das Axiom III 6* in der weiteren Fassung notwendig folgt.

Das engere Axiom III 6 zusammen mit den früheren Axiomen I, II, III 1—III 5 gestattet den Nachweis des Satzes von der Gleichheit der Scheitelwinkel und der Möglichkeit der Halbierung einer jeden Strecke, sowie den Beweis des Euklidischen Satzes, daß der Außenwinkel eines Dreiecks stets größer ist als jeder der beiden inneren Winkel.

IV. Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom).

Durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden a läßt sich nur *eine* Gerade ziehen, welche a nicht schneidet.

Der Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel, und mithin auch der Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, folgen aus dem Parallelenaxiom mit Hilfe der vorangehenden Axiome, auch wenn wir das letzte Kongruenzaxiom nur in der engeren Fassung III 6 zu Grunde legen.

V. Axiome der Stetigkeit.

V 1. *Axiom des Messens* (Archimedisches Axiom).

Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$, so daß A_1 zwischen A und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4 u. s. w. liegt, und überdies die Strecken

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$$

einander gleich sind: dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n, daß B zwischen A und A_n liegt.

V 2. *Axiom der Nachbarschaft.*

Ist irgend eine Strecke AB vorgelegt, so gibt es stets ein Dreieck, in dessen Innerem keine zu AB kongruente Strecke sich finden läßt.

Dieses Axiom der Nachbarschaft ist eine notwendige Folge aus dem Satze von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke, wie man aus dem Umstande erkennt, daß wegen dieses Satzes vom gleichschenkligen Dreieck die Summe zweier Seiten in jedem Dreiecke größer als die dritte Seite ausfällt.

Ich stelle nun folgende Behauptung auf:

Mit Benutzung der sämtlichen Axiome I—V *ist es möglich, den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck zu beweisen,*

auch wenn wir das Axiom von der Dreieckskongruenz nur in der engeren Fassung III 6 *zu Grunde legen.*

Um dies einzusehen, wählen wir zwei sich schneidende Gerade als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems, und ordnen den Punkten dieser Geraden auf Grund der linearen Kongruenzaxiome III 1—3 und des Archimedischen Axioms V. 1 reelle Zahlen zu; die sämtlichen Punkte der Ebene sind dann durch Zahlenpaare darstellbar.

Das engere Kongruenzaxiom III 6 zusammen mit V 1 gestattet leicht die Begründung der Proportionenlehre, und aus dieser folgt, daß die Geraden durch lineare Gleichungen darstellbar sind.

Fassen wir nun den Punkt mit den Koordinaten $x=1$ und $y=s$ ins Auge, wo s eine beliebige Größe ist, und betrachten diejenige Kongruenz der Ebene mit sich im engeren Sinne, bei welcher der Koordinatenanfang sich selbst und die x-Achse der Verbindungsgeraden des Koordinatenanfanges mit jenem Punkte $1, s$ entspricht, so erkennen wir leicht, daß diese Drehung durch ein Formelsystem von der Gestalt

$$x' = \alpha_s x + \beta_s y,$$
$$y' = \gamma_s x + \delta_s y$$

vermittelt wird, worin $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s$ Zahlen bedeuten, die durch s eindeutig bestimmt sind. Indem wir nun einer jeden Geraden durch den Koordinatenanfang ihren Treffpunkt $(1, t)$ mit der Geraden $x=1$ zuordnen, erhalten wir zu jeder solchen Drehung der Ebene um den Koordinatenanfang eine Transformation der Punkte der Geraden $x=1$ von der Gestalt

$$t' = \frac{\gamma_s + \delta_s t}{\alpha_s + \beta_s t}.$$

Die Koeffizienten $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s$ bezeichnen Funktionen von s, die sicher für alle rationalen Werte von s definiert sind; man sieht dann leicht ein, daß diese Funktionen sich nach dem Prinzip der Stetigkeit so ergänzen lassen müssen, daß man aus ihnen stetige und für alle reellen Werte von s, sowie für $s=\infty$ eindeutig definierte Funktionen erhält. Wenn das geschehen ist, so liefert die Formel

$$t' = \frac{\gamma_s + \delta_s t}{\alpha_s + \beta_s t}$$

eine Gruppe von linearen Transformationen, die gewiß folgende Eigenschaften besitzt:

1. Es gibt außer der Identität keine Transformation der Gruppe, welche einen Wert der Variabeln t festläßt.

2. Es gibt stets eine Transformation der Gruppe, welche einen gegebenen Wert von t in irgend einen anderen bestimmten Wert dieser Variabeln überführt.

In meiner Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie[1]) (§ 18) habe ich bewiesen, daß eine Gruppe mit diesen Eigenschaften notwendig holoedrisch-isomorph ist mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen eines Kreises in sich, und folglich auch mit derjenigen Transformationsgruppe, die durch die Formel

$$T' = \frac{ST+1}{-T+S}$$

dargestellt wird, wo T, T' die Variabeln und S den Parameter bedeutet. Hieraus können wir nun entnehmen, daß die obige Gleichung zwischen T und T' so gelöst werden kann, daß wir

$$t = \frac{C+DT}{A+BT}, \quad t' = \frac{C+DT'}{A+BT'}$$

setzen, wobei A, B, C, D Konstante bedeuten. Führen wir dann mittels der Formeln

$$x = AX + BY,$$
$$y = CX + DY$$

statt der Koordinaten x, y die Koordinaten X, Y ein, so entspricht einer bestimmten Drehung um den Koordinatenanfang die Formel

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{X+SY}{SX-Y},$$

und hieraus entnehmen wir die Drehungsformeln

$$X' = C_s(SX - Y),$$
$$Y' = C_s(X + SY),$$

wobei C_s eine von S abhängige Größe bezeichnet.

Unter Zuhilfenahme des Axioms der Nachbarschaft V 2 folgt, daß die Determinante dieser eine Drehung vermittelnden Transformationsformeln notwendig $= 1$ sein muß; mithin ist

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{1+S^2}},$$

und die Gruppe der Drehungen stellt sich daher in den Koordinaten X, Y wie folgt dar:

$$X' = \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} X - \frac{1}{\sqrt{1+S^2}} Y,$$
$$Y' = \frac{1}{\sqrt{1+S^2}} X + \frac{S}{\sqrt{1+S^2}} Y.$$

Aus diesen Formeln entnehmen wir die Gültigkeit aller Tatsachen der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und insbesondere den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

1) Mathematische Annalen 1903. Anhang IV S. 143—145.

Wir haben im vorstehenden kurz den Beweis dafür angedeutet, daß das Axiom von der Dreieckskongruenz im weiteren Sinne III 6* eine Folge dieses Axioms im engeren Sinne III 6 ist, wenn man die Stetigkeitsaxiome V 1 und V 2 zu Hilfe nimmt.

Nunmehr entsteht die Frage, *ob auch ohne die Axiome der Stetigkeit* V 1 *und* V 2 *die weitere Fassung des Axioms von der Dreieckskongruenz sich als eine notwendige Folge der engeren Fassung desselben ergibt. Die nachfolgende Untersuchung wird zeigen, daß dies nicht der Fall ist, selbst dann nicht, wenn man noch die Proportionenlehre als gültig voraussetzt. Die Geometrie, welche ich zu diesem Zwecke im folgenden konstruiere, beantwortet nicht nur die eben aufgeworfene Frage, sondern verbreitet überhaupt, wie ich glaube, über den logischen Zusammenhang des Satzes vom gleichschenkligen Dreieck mit den anderen in Betracht kommenden elementaren Sätzen der ebenen Geometrie neues Licht.*

Es sei t ein Parameter und α irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$\alpha = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \cdots;$$

darin mögen $a_0 (\neq 0), a_1, a_2, \ldots$ beliebige reelle Zahlen bedeuten und n sei eine beliebige ganze rationale Zahl $\left(\gtreqless 0\right)$. Die Gesamtheit aller Ausdrücke von dieser Gestalt α sehen wir als ein komplexes Zahlensystem T an, indem wir folgende Festsetzungen treffen. Man addiere, subtrahiere, multipliziere, dividiere irgend welche Zahlen des Systems T, als wären sie gewöhnliche Potenzreihen, die nach steigenden Potenzen der Variabeln t fortschreiten. Die entstehenden Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten sind dann wiederum Ausdrücke von der Gestalt α, und mithin Zahlen des komplexen Zahlensystems T. Eine Zahl α in T heiße $<$ oder > 0, je nachdem in dem betreffenden Ausdrucke α der erste Koeffizient $a_0 <$ oder > 0 ausfällt. Sind irgend zwei Zahlen α, β des komplexen Systems T vorgelegt, so heiße $\alpha < \beta$ bez. $\alpha > \beta$, je nachdem $\alpha - \beta < 0$ oder > 0 ausfällt. Es leuchtet ein, daß bei diesen Festsetzungen alle formalen Regeln und Gesetze, wie bei den gewöhnlichen reellen Zahlen, gültig sind; dagegen gilt für unser System T das Archimedische Axiom nicht, da ja, wie groß auch die positive reelle Zahl A gewählt sei, stets $At < 1$ bleibt; unser komplexes Zahlensystem T ist ein Nicht-Archimedisches System.

Sind α, β irgend zwei Zahlen des Systems T, und bedeutet i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, so heiße

$$\gamma = \alpha + i\beta$$

eine imaginäre Zahl zum komplexen System T.

Ist ferner τ ein Ausdruck von der Gestalt

$$\tau = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \cdots,$$

wo $a_0 (\neq 0), a_1, a_2, \ldots$ reelle Zahlen bedeuten und der Exponent n der niedrigsten Potenz von t positiv ausfällt, so heiße τ *eine unendlich kleine Zahl des komplexen Systems T.*

Offenbar läßt sich stets die unendliche Reihe

$$1 + \frac{(1+i)\tau}{1!} + \frac{(1+i)^2\tau^2}{2!} + \frac{(1+i)^3\tau^3}{3!} + \cdots$$

nach steigenden Potenzen von t ordnen, und stellt dann eine imaginäre Zahl zum komplexen System T dar; wir bezeichnen diese imaginäre Zahl mit $e^{(1+i)\tau}$. Ist dann noch ϑ irgend eine gewöhnliche reelle Zahl, so setzen wir

$$e^{i\vartheta} \cdot e^{(1+i)\tau} = e^{i\vartheta + (1+i)\tau}.$$

Nunmehr konstruieren wir mit Hilfe des komplexen Zahlensystems T eine ebene Geometrie wie folgt:

Wir denken uns ein Paar von Zahlen (x, y) des Systems T als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u : v : w)$ aus T, falls u, v nicht beide 0 sind, als eine Gerade; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

ausdrücken, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden $(u : v : w)$ liegt.

Berücksichtigen wir die obige Festsetzung, derzufolge die Zahlen in T sich ihrer Größe nach anordnen lassen, so können wir leicht solche Festsetzungen für unsere Punkte und Geraden treffen, daß auch die Axiome II der Anordnung sämtlich erfüllt sind. In der Tat, stellen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ irgend welche Punkte auf einer Geraden dar, so möge dies ihre Reihenfolge auf der Geraden sein, wenn die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder $y_1, y_2, y_3, \ldots$ in dieser Reihenfolge entweder beständig abnehmen bez. wachsen; um ferner die Forderung des letzten Axioms der Anordnung II. 4 zu erfüllen, haben wir nur nötig festzusetzen, daß alle Punkte (x, y), für die $ux + vy + w$ kleiner oder größer als 0 ausfällt, auf der einen bez. auf der anderen Seite der Geraden $(u : v : w)$ gelegen sein sollen.

Wenn zwei Punkte A, B beide zugleich entweder auf der x-Achse oder auf der y-Achse liegen, so nennen wir die absolute Differenz der Abszissen bez. der Ordinaten dieser beiden Punkte ihre Entfernung oder auch die Länge der durch sie bestimmten Strecke. Nunmehr definieren wir das Abtragen von Strecken und Winkeln durch die Parallelverschiebungen und Drehungen der Ebene in sich wie folgt. Die Parallelverschiebung wird durch eine Transformation von der Gestalt

$$x' = x + \alpha,$$
$$y' = y + \beta$$

oder
$$x' + iy' = x + iy + \alpha + i\beta$$
vermittelt, worin α, β Zahlen in T, nämlich die Projektionen der Parallelverschiebung in Richtung der Achsen sind. Die Drehung der Ebene um den Koordinatenanfangspunkt (0, 0) werde durch die Formel
$$x' + iy' = e^{i\vartheta + (1+i)\tau}(x + iy)$$
vermittelt, worin ϑ irgend eine reelle Zahl bedeutet, und τ irgend eine unendlich kleine Zahl im komplexen System T bedeutet; $\vartheta + \tau$ heiße der Drehungswinkel dieser Drehung.

Zunächst ist klar, daß bei allen Verschiebungen und Drehungen der Ebene jede Gerade wiederum in eine Gerade übergeht, und zugleich die Anordnung der Punkte auf einer Geraden sowie ihre Lage zu den Geraden ebenfalls unverändert bleibt.

Es seien nun (x, y) und (x', y') irgend zwei vom Koordinatenanfangspunkt verschiedene Punkte. Die Punkte der Verbindungsgeraden von (x', y') mit dem Koordinatenanfangspunkt werden durch die Koordinaten $\mu x', \mu y'$ dargestellt, worin μ irgend eine Zahl des komplexen Systems T bedeutet. Wir wollen nun zeigen, daß es stets eine Drehung um den Koordinatenanfangspunkt gibt, durch welche der Punkt (x, y) in einen Punkt jener Verbindungsgeraden übergeht. Zu dem Zwecke untersuchen wir die Gleichung
$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau}(x + iy) = \mu(x' + iy').$$
Durch Division mit der konjugiert imaginären Gleichung folgt
$$e^{2i(\vartheta+\tau)} \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{x' + iy'}{x' - iy'},$$
oder
$$e^{2i(\vartheta+\tau)} = \xi + i\eta,$$
worin
$$\xi + i\eta = \frac{x - iy}{x + iy} \cdot \frac{x' + iy'}{x' - iy'}$$
gesetzt ist. Wegen
$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$
folgt, daß ξ, η solche Zahlen in T sind, bei deren Darstellung durch t die niedrigsten Exponenten der Potenzen von $t \geqq 0$ sind, und mindestens einer derselben $= 0$ ausfällt. Wir können mithin setzen
$$\xi = a + \xi',$$
$$\eta = b + \eta,$$
worin a, b gewöhnliche reelle Zahlen mit der Quadratsumme 1 und ξ', η' unendlich kleine Zahlen in T bedeuten.

Die reelle Zahl ϑ ist durch die Gleichung
$$e^{2i\vartheta} = a + ib$$

bis auf ganze Vielfache von π, und ferner τ als unendlich kleine Zahl in T durch die Gleichung

$$e^{2i\tau} = 1 + \frac{\xi' + i\eta'}{a + ib}$$

völlig eindeutig bestimmt. Nach Einsetzung von ϑ und τ in die ursprüngliche Gleichung folgt μ eindeutig als eine Zahl in T. Wir sehen daraus, daß es stets eine Drehung von der gewünschten Beschaffenheit gibt, und daß diese Drehung bis auf Drehungen um den Winkel π eindeutig bestimmt ist.

Nunmehr nennen wir irgend welche Strecken und Winkel einander kongruent oder gleich, sobald es gelingt, dieselben durch Verschiebungen und Drehungen der Ebene miteinander zur Deckung zu bringen. Unsere obige Entwicklung zeigt dann, daß die sämtlichen Axiome III erfüllt sind, wobei das letzte Kongruenzaxiom im engeren Sinne III 6 zu verstehen ist. Auch gilt, wie man sieht, das Parallelenaxiom IV, und aus der Formel für die Drehung kann ferner leicht ersehen werden, daß auch das Axiom V 2 der Nachbarschaft in unserer Geometrie gültig ist.

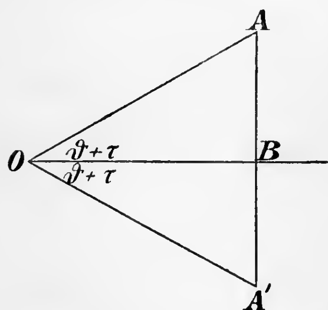
Wir fassen dies wie folgt zusammen:

In unserer Geometrie gelten die sämtlichen oben aufgestellten Axiome der gewöhnlichen ebenen Geometrie mit Ausnahme des Archimedischen Axioms V 1, so jedoch, daß das Axiom über die Dreieckskongruenz dabei in der engeren Fassung III 6 zu verstehen ist.

Wir leiten noch einige weitere Sätze ab, die in unserer Geometrie gültig sind:

In unserer Geometrie gibt es einen rechten Winkel, und jeder beliebige Winkel ist halbierbar.

In der Tat, $\frac{\pi}{2}$ ist gewiß ein rechter Winkel, weil derselbe bei einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in seinen Nebenwinkel übergeht. Ebenso leuchtet ein, daß, wenn $\vartheta + \tau$ einen beliebigen Winkel bedeutet, $\frac{\vartheta}{2} + \frac{\tau}{2}$ die Hälfte desselben ist.



Wir führen nun den Begriff der Spiegelung an einer Geraden a wie folgt ein. Fällen wir von irgend einem Punkte A auf irgend eine Gerade a das Lot und verlängern dieses um sich selbst über den Fußpunkt B hinaus bis A', so heiße A' der Spiegelpunkt von A. Wir wählen zunächst zur Geraden a die x-Achse und für A einen Punkt im positiven Quadranten mit den Koordinaten α, β. Der Winkel AOB zwischen dem Halbstrahl OA und der

positiven x-Achse sei $\vartheta + \tau$, und zwar möge der Punkt $x = \gamma$ auf der x-Achse bei der Drehung um den Winkel $\vartheta + \tau$ in den Punkt A übergehen, so daß

$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau}\gamma = \alpha + i\beta$$

wird. Der Spiegelpunkt A' des Punktes A in Bezug auf die x-Achse hat die Koordinaten $\alpha, -\beta$. Führen wir mithin die Drehung um den Winkel $\vartheta + \tau$ aus, so entsteht aus dem Punkte A' ein Punkt, der durch die imaginäre Zahl

$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau}(\alpha - i\beta) = \frac{\alpha + i\beta}{\gamma}(\alpha - i\beta) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma}$$

dargestellt wird, d. h. der entsprechende Punkt liegt auf der x-Achse; folglich ist der Winkel $A'OB$ ebenfalls gleich $\vartheta + \tau$, und stimmt mithin mit dem Winkel AOB überein. Wir sprechen dies Resultat wie folgt aus:

Wenn in zwei symmetrisch liegenden rechtwinkligen Dreiecken die beiden Katheten übereinstimmen, so sind auch die entsprechenden Winkel an der Hypotenuse einander gleich.

Wir folgern hieraus zugleich den allgemeineren Satz:

Im Spiegelbilde einer Figur stimmen die Winkel stets mit den entsprechenden Winkeln der ursprünglichen Figur überein.

Es sei a irgend eine Gerade durch den Anfangspunkt O, und $\vartheta + \tau$ sei der Winkel zwischen a und der x-Achse: dann erhält man zu dem beliebigen Punkt (x, y) den Spiegelpunkt in Bezug auf die Gerade a, indem man die Ebene zunächst um den Winkel $-\vartheta - \tau$ dreht, sodann an der x-Achse spiegelt, und schließlich die Ebene um den Winkel $\vartheta + \tau$ dreht. Die Ausführung dieser Operationen liefert der Reihe nach aus der imaginären Zahl $x + iy$ die Zahlen

$$e^{-i\vartheta - (1+i)\tau}(x + iy), \quad e^{i\vartheta - (1-i)\tau}(x - iy),$$
$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau} e^{i\vartheta - (1-i)\tau}(x - iy) = e^{2i(\vartheta + \tau)}(x - iy);$$

mithin wird die Spiegelung an der Geraden a durch die Formel

$$x' + iy' = e^{2i(\vartheta + \tau)}(x - iy)$$

für den Spiegelpunkt vermittelt.

Nun mögen a_1, a_2 ebenfalls zwei Gerade durch den Anfangspunkt O und $\vartheta_1 + \tau_1$ bez. $\vartheta_2 + \tau_2$ die Winkel bedeuten, die diese Gerade mit der x-Achse einschließen. Führen wir der Reihe nach die Spiegelungen an den Geraden a, a_1, a_2 aus, so wird die entsprechende Transformation des Punktes (x, y) durch die Formel

$$x' + iy' = e^{2i(+\vartheta - \vartheta_1 + \vartheta_2 + \tau - \tau_1 + \tau_2)}(x - iy)$$

vermittelt, und hieraus entnehmen wir das folgende Resultat:

Wenn man an irgend drei durch einen Punkt gehenden Geraden nacheinander die Spiegelung ausführt, so ist die dann entstehende Transformation der Ebene wiederum eine Spiegelung.

Aus diesem Satze beweisen wir leicht die weiteren Sätze:

Die Mittelsenkrechten auf den drei Seiten eines Dreieckes treffen sich in einem Punkt.

Wenn in einem Vierecke $ABCD$ ohne einspringende Ecken die Winkel ACB und ADB übereinstimmen, so sind auch die Winkel BAC und BDC einander gleich.

Die genannten Sätze genügen, um die Proportionenlehre ohne Hilfe des Satzes vom gleichschenkligen Dreiecke zu begründen: man hat nur nötig, den in meiner Festschrift *Grundlagen der Geometrie* (§§ 14—16) dargelegten Beweis in geeigneter Weise abzuändern, was leicht geschehen kann. Wir erkennen hieraus, daß es zur Begründung der Proportionenlehre in der ebenen Euklidischen Geometrie nicht des vollständigen Axioms von der Dreieckskongruenz im weiteren Sinne III 6* bedarf, sondern daß dazu diejenigen Bestandteile dieses Axioms hinreichen, die in den eben genannten Sätzen enthalten sind.

Der Fundamentalsatz der Proportionenlehre lautet:

Schneiden zwei Parallele auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels die Strecken a, b bez. a', b' ab, so gilt die Proportion

$$a : b = a' : b'.$$

Umgekehrt, wenn vier Strecken a, b, a', b' diese Proportion erfüllen, und a, a' und b, b' je auf einem Scheitel eines beliebigen Winkels abgetragen werden, so sind die Verbindungsgeraden der Endpunkte von a, b bez. von a', b' einander parallel.

Dieser Satz konnte auch direkt aus dem Umstande abgeleitet werden, daß in unserer Geometrie die Geraden durch lineare Gleichungen definiert sind, und zugleich erkennen wir hieraus diese Tatsachen:

In unserer Geometrie gelten die Schnittpunktsätze von Pascal und Desargues, und daher überhaupt alle Sätze der projektiven Geometrie.

Wir kommen nun zu der wesentlichsten Frage, *ob in unserer Geometrie der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreieckes gilt.*

Zum Zwecke dieser Untersuchung sei a eine Gerade durch den Koordinatenanfang O, die mit der x-Achse den Winkel $\vartheta + \tau$ einschließt; ferner sei A ein Punkt auf a so, daß die Strecke $OA = 1$ ausfällt, und A' sei der Spiegelpunkt von A in Bezug auf die x-Achse (vgl. Fig. S. 101).

Um die Koordinaten (x, y) des Punktes A zu berechnen, bedenken wir, daß die Drehung um den Winkel $-\vartheta-\tau$ den Punkt A in den Punkt mit den Koordinaten $1, 0$ überführen muß; wir haben mithin

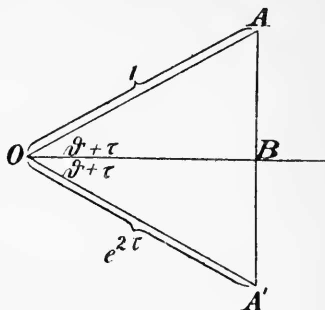
$$e^{-i\vartheta-(1+i)\tau}(x+iy)=1,$$

und folglich

$$x+iy=e^{i\vartheta+(1+i)\tau},$$

d. h. $x=OB=e^{\tau}\cos(\vartheta+\tau)$,

$y=AB=A'B=e^{\tau}\sin(\vartheta+\tau)$.



Um die Länge der Strecke OA' zu berechnen, bedenken wir, daß A' die Koordinaten $x, -y$ besitzt; die Drehung um den Winkel $\vartheta+\tau$ liefert mithin

$$e^{i\vartheta+(1+i)\tau}(x-iy)=e^{i\vartheta+(1+i)\tau-i\vartheta+(1-i)\tau}=e^{2\tau},$$

d. h. die Strecke OA' fällt gleich $e^{2\tau}$ aus, und sie unterscheidet sich mithin von der Strecke 1 um eine unendlich kleine von 0 verschiedene komplexe Zahl.

Wir ersehen hieraus, daß im allgemeinen in zwei symmetrisch liegenden rechtwinkligen Dreiecken mit übereinstimmenden Katheten die Hypotenusen voneinander verschieden ausfallen, und mithin bei der Spiegelung an einer Geraden die Strecken im Spiegelbilde denjenigen in der ursprünglichen Figur *nicht* notwendig gleich sind.

In unserer Geometrie gilt nicht der Satz vom gleichschenkligen Dreieck, und also auch nicht das Axiom von der Kongruenz der Dreiecke im weiteren Sinne.

Wir erörtern noch in unserer Geometrie die Euklidische Lehre vom Flächeninhalt der Polygone und den Satz von der Geraden als der kürzesten Verbindung von zwei Punkten.

Was die erstere Frage betrifft, so mögen zwei Polygone *zerlegungsgleich* heißen, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander kongruent sind, und zwei Polygone mögen *inhaltsgleich* heißen, wenn es möglich ist, zu denselben zwei zerlegungsgleiche Polygone zuzufügen, so daß die beiden zusammengesetzten Polygone einander zerlegungsgleich sind.

Aus diesen Definitionen wird leicht die Inhaltsgleichheit zweier Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe bewiesen.

Auch gilt in unserer Geometrie der Pythagoräische Lehrsatz, demzufolge die beiden Quadrate über den Katheten irgend eines rechtwinkligen Dreieckes zusammen inhaltsgleich dem Quadrate über der Hypotenuse sind.

Denn wir erkennen, daß in dem Euklidischen Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes durchweg nur die Kongruenz von gleichliegenden Dreiecken, und mithin nur das Axiom über die Dreieckskongruenz im engeren Sinne benutzt wird.

Wenden wir den Pythagoräischen Lehrsatz auf die beiden vorhin konstruierten symmetrisch liegenden rechtwinkligen Dreiecke OAB und $OA'B$ (Fig. S. 101) an, so folgt, daß die Quadrate über den beiden Hypotenusen $OA = 1$ und $OA' = e^{2\tau}$ einander inhaltsgleich sind, d. h. es gibt in unserer Geometrie Quadrate, deren Seiten sich um unendlich kleine von 0 verschiedene Zahlen unterscheiden und die dennoch einander inhaltsgleich sind.

Infolge dieses Umstandes hat in unserer Geometrie der fundamentale Satz Euklids, wonach zwei inhaltsgleiche Dreiecke mit gleicher Grundlinie stets von gleicher Höhe sind, ebenfalls keine Gültigkeit.

Unsere Geometrie führt uns mithin zu folgender Erkenntnis:

Es ist unmöglich, auf das Axiom der Dreieckskongruenz im engeren Sinne die Euklidische Lehre vom Flächeninhalt zu begründen, selbst wenn man die Gültigkeit der Proportionenlehre hinzunimmt.

In meiner Festschrift *Grundlagen der Geometrie* habe ich den Satz Euklids von der Gleichheit der Höhen in inhaltsgleichen Dreiecken auf gleicher Grundlinie dadurch bewiesen, daß ich den Begriff des Flächenmaßes einführte. Dieses Flächenmaß habe ich als das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe definiert. Der Nachweis, daß diese Größe davon unabhängig ist, welche Seite des Dreiecks man als Grundlinie wählt, erfordert in der Tat die Benutzung symmetrisch gelegener ähnlicher Dreiecke, und mithin das Axiom über die Dreieckskongruenz im weiteren Sinne.

Da in unserer Geometrie die bekannte Beziehung zwischen der Hypotenuse und den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, welche in der gewöhnlichen Geometrie aus dem Pythagoräischen Lehrsatz geschlossen wird, nicht gilt, so möchte ich unsere Geometrie eine *Nicht-Pythagoräische Geometrie* nennen.

Eine weitere Folgerung, die Euklid aus dem Satze von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke zieht, ist der Satz, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte ausfällt. Um die Gültigkeit dieses Satzes in unserer Geometrie zu prüfen, nehmen wir in dem rechtwinkligen Dreiecke $OA'B$ (Fig. S. 101) $\vartheta = 0$, so daß die Hypotenuse OA' mit der Kathete OB den unendlich kleinen von 0 verschiedenen Winkel τ einschließt. Wir erhalten dann die Summe der beiden Katheten durch die komplexe Zahl

$$e^{\tau}(\cos\tau + \sin\tau) = \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2} + \cdots\right)\left(1 - \frac{\tau^2}{2} + \cdots + \tau - \frac{\tau^3}{6} + \cdots\right)$$
$$= 1 + 2\tau + \tau^2 + \cdots$$

ausgedrückt, und diese Zahl ist offenbar um eine unendlich kleine von 0 verschiedene Zahl kleiner als die Hypotenuse

$$OA' = e^{2\tau} = 1 + 2\tau + 2\tau^2 + \cdots$$

Der Satz, wonach die Summe zweier Seiten in jedem Dreieck größer als die dritte ist, gilt also nicht in unserer Geometrie.

Wir erkennen hieraus die wesentliche Abhängigkeit dieses Satzes von dem Axiom über die Dreieckskongruenz im weiteren Sinne.

Wir fassen die hauptsächlichsten aus unserer Nicht-Pythagoräischen Geometrie entspringenden Resultate zusammen wie folgt:

Verstehen wir das Axiom über die Dreieckskongruenz im engeren Sinne und nehmen wir von den Stetigkeitsaxiomen nur das Axiom der Nachbarschaft als gültig an, dann ist der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck nicht beweisbar, selbst dann nicht, wenn wir die Lehre von den Proportionen als gültig voraussetzen. Ebenso wenig folgt die Euklidische Lehre von den Flächeninhalten; auch der Satz, wonach die Summe zweier Seiten im Dreieck größer als die dritte ausfällt, ist keine notwendige Folge der gemachten Annahmen.

Wir wollen noch eine andere Nicht-Pythagoräische Geometrie konstruieren, die sich von der eben behandelten Geometrie dadurch unterscheidet, daß in ihr das Archimedische Axiom (V 1), dagegen nicht das Axiom von der Nachbarschaft (V 2) gültig ist.

Man betrachte den Bereich Ω aller derjenigen algebraischen Zahlen, welche hervorgehen, indem man von der Zahl 1 ausgeht und eine endliche Anzahl von Malen die vier Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ anwendet, wobei ω jedesmal eine Zahl bedeuten kann, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist.

Wir denken uns ein Paar von Zahlen x, y aus Ω als einen Punkt und die Verhältnisse von irgend drei Zahlen $(u:v:w)$ aus Ω, falls u, v nicht beide 0 sind, als eine Gerade; ferner möge das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

ausdrücken, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden $(u:v:w)$ liegt.

Die Anordnung der Punkte und Geraden, sowie die Festsetzung über die Parallelverschiebung treffen wir genau wie vorhin, dagegen weichen wir von der früheren Festsetzung hinsichtlich der Drehung um einen Punkt in folgender Weise ab:

Wir fassen die Punkte der Geraden $x = 1$ ins Auge; da dieselben ein abzählbares System bilden, so können wir sie in diese Reihe bringen: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Es sei dann allgemein ϑ_k der Winkel, unter welchem die Verbindungslinie des Punktes P_k mit dem Koordinatenanfang die x-Achse schneidet. Wir wählen nun aus der Reihe $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ eine solche Reihe $\vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, \vartheta_{k_3}, \ldots$ aus, daß für keinen Wert von n eine Gleichung von der Gestalt

$$\vartheta_{k_n} = r\pi + r_1\vartheta_{k_1} + r_2\vartheta_{k_2} + \cdots + r_{n-1}\vartheta_{k_{n-1}}$$

besteht, wo $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ rationale Zahlen sind, während andererseits für jedes k sich ein Wert von n bestimmen läßt, so daß

$$\vartheta_k = r\pi + r_1\vartheta_{k_1} + r_2\vartheta_{k_2} + \cdots + r_n\vartheta_{k_n}$$

besteht, wobei $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ rationale Zahlen sind.

Die Drehung unserer Ebene um den Winkel ϑ_k werde dann durch die Formel

$$x' + iy' = e^{i\vartheta_k + r_1}(x + iy)$$

vermittelt.

Es stellt sich heraus, daß in dieser Geometrie sämtliche Axiome I bis IV erfüllt sind, wenn das Axiom über die Dreieckskongruenz im engeren Sinne III 6 verstanden wird. Außerdem gilt das Archimedische Axiom V 1, dagegen nicht das Axiom der Nachbarschaft V 2. Auch die oben genannten Sätze und die aus diesen zu ziehenden Folgerungen, insbesondere die Proportionenlehre ist gültig. Dagegen gilt nicht der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, und folglich auch nicht die Euklidische Lehre vom Flächeninhalt. Der Satz, daß die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, gilt in unserer Geometrie ebenfalls nicht, da ja aus diesem Satze das Axiom der Nachbarschaft V 2 notwendig folgen würde.

Zur Gültigkeit des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind mithin beide Stetigkeitsaxiome V 1, V 2 *erforderlich:* in der Tat haben wir in dem früheren Beweise am Anfange dieser Untersuchung (S. 93—S. 94) jedes dieser beiden Axiome benutzt.

Wir haben oben (vgl. S. 91—S. 92) erwähnt, daß aus dem Dreieckskongruenzaxiom in der engeren Fassung III 6 und den vorangehenden Axiomen notwendig das Kongruenzaxiom III 6 und mithin allgemein die Kongruenz der Figuren in der weiteren Fassung folgt, sobald wir den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck als gültig annehmen. Es erscheint mir bemerkenswert, daß diese Ergänzung des Kongruenzaxioms in der engeren Fassung III 6 noch auf eine ganz andere Weise geschehen kann, nämlich mittels einer sehr anschaulichen

Forderung, deren Inhalt wesentlich mit dem in den Grundlagen von mir bewiesenen Satz 32 (S. 46) übereinstimmt und die andererseits, wie wir in dieser Note (vgl. S. 102) gezeigt haben, nicht eine Folgerung der Kongruenzsätze im *engeren* Sinne ist.

Es seien die Begriffe „zerlegungsgleich“ und „inhaltsgleich“ wie in § 18 der Grundlagen der Geometrie definiert — so jedoch, daß dabei der Kongruenzbegriff im *engeren* Sinne zu verstehen ist. Dementsprechend werden im folgenden stets nur das Kongruenzaxiom in der *engeren* Fassung III 6 und die vorangehenden Axiome I, II, III 1—III, sowie das Parallelaxiom IV angewandt.

Die fragliche Forderung, die dann als Ergänzung dienen soll, lautet:

> *Forderung.* Ein Polygon ist niemals mit einem Polygone zerlegungsgleich, dessen Begrenzung innere Punkte, jedoch keine äußeren Punkte des ersteren Polygons enthält.

Zunächst folgt aus dieser Forderung leicht der Satz:

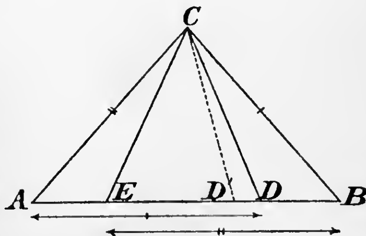
Ein Polygon ist niemals mit einem Polygone *inhaltsgleich*, dessen Begrenzung innere Punkte, jedoch keine äußeren Punkte des ersteren Polygons enthält.

In der Tat, wäre ein Polygon P dem innerhalb P gelegenen Polygon Q inhaltsgleich, so müßten zwei einander zerlegungsgleiche Polygone P' und Q' existieren, so daß das Polygon $P + P'$ mit dem Polygon $Q + Q'$ zerlegungsgleich wäre. Da dann auch $P + P'$ mit $P + Q'$ zerlegungsgleich wäre, so müßten auch die Polygone $P + Q'$ und $Q + Q'$ zerlegungsgleich sein, was der aufgestellten Forderung widerspricht.

Nunmehr beweisen wir der Reihe nach die folgenden Sätze:

Wenn in einem Dreiecke ABC die beiden Winkel bei A und B einander gleich sind, so sind auch stets die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Zum Beweise bestimmen wir auf AB die Punkte E und D, so daß $AD = BC$ und $BE = AC$ wird. Nach dem ersten Kongruenzsatze in der engeren Fassung folgt die Kongruenz der Dreiecke DAC und CBE; diese beiden Dreiecke sind mithin auch inhaltsgleich. Wir schließen hieraus, daß auch ihre Grundlinien AD und BE miteinander übereinstimmen. Wäre dies nämlich nicht der Fall und nehmen wir etwa $AD' = BE$, so würde nach dem bekannten Euklidischen Verfahren



(vgl. S. 41) folgen, daß die beiden Dreiecke $AD'C$ und BEC einander inhaltsgleich sind. Dann aber müßten auch die Dreiecke ADC und $AD'C$ einander inhaltsgleich sein, was dem vorhin aus unserer Forderung gewonnenen Satze widerspricht. Die Gleichheit der Strecken AD und BE führt unmittelbar zu der von uns aufgestellten Behauptung.

Wenn in einem Dreiecke ABC die beiden Seiten AC und BC einander gleich sind, so sind auch stets die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil an, daß der Winkel $\sphericalangle CAB$ größer als $\sphericalangle CBA$ sei. Sodann bestimmen wir auf der Geraden AB die Punkte A' und B' derart, daß

$$\sphericalangle CA'B = \sphericalangle CBA \quad \text{und} \quad \sphericalangle CB'A = \sphericalangle CAB$$

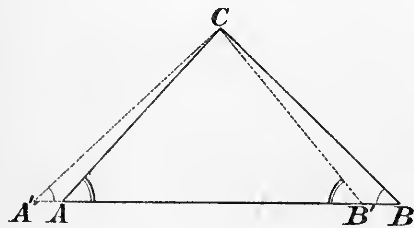
wird. Nach dem vorhin bewiesenen Satze ist mithin

$$CA' = CB \quad \text{und} \quad CB' = CA$$

und hieraus folgt mit Benutzung der Voraussetzung:

$$CA' = CB'. \tag{1*}$$

Wenden wir den Satz vom Außenwinkel auf die Dreiecke ACA' und BCB' an, so erhalten wir die Gleichungen



$$\sphericalangle ACA' = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CA'B$$

und

$$\sphericalangle BCB' = \sphericalangle CB'A - \sphericalangle CBA;$$

mithin ist

$$\sphericalangle ACA' = \sphericalangle BCB'. \tag{2*}$$

Die Formeln (1*) und (2*) in Verbindung mit der Voraussetzung lehren, daß die Dreiecke ACA' und BCB' im engeren Sinne miteinander kongruent sind; dann aber wäre auch insbesondere

$$\sphericalangle AA'C = \sphericalangle BB'C.$$

Diese Folgerung ist ein Widersinn, da die beiden Winkel bez. innerer Winkel und nicht anliegender Außenwinkel im Dreieck $A'B'C$ sind.

Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen und wir erkennen zugleich, daß die Dreieckskongruenzsätze im weiteren Sinne eine notwendige Folgerung aus dem Kongruenzaxiom in der engeren Form III 6 sind, wenn man noch die obige anschauliche Forderung über den Begriff der Zerlegungsgleichheit zu Hilfe nimmt.

Mit Hilfe der beiden Stetigkeitsaxiome V 1 und V 2 ist es noch nicht möglich, die ebene Geometrie als identisch mit der gewöhnlichen analytischen „Cartesischen" Geometrie nachzuweisen, in der *jedem* Zahlen-

paar ein Punkt der Ebene entspricht. Zu diesem Nachweise ist aber weder das Axiom vom Dedekindschen Schnitte, noch das Axiom von der Existenz der Grenzpunkte notwendig; vielmehr genügt es, das Axiom V 2 durch das Axiom allgemeineren Charakters zu ersetzen, welches ich bereits in den *Grundlagen der Geometrie*[1]) aufgestellt und *Axiom der Vollständigkeit* genannt habe.

Anhang III.

Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.

Abgedruckt aus Math. Ann. Bd. 57.

In meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie" Kap. I (S. 2—S. 18)[2]) habe ich ein System von Axiomen für die Euklidische Geometrie aufgestellt und dann gezeigt, daß lediglich auf Grund der die Ebene betreffenden Bestandteile dieser Axiome der Aufbau der ebenen Euklidischen Geometrie möglich ist, selbst wenn man die Anwendung der Stetigkeitsaxiome vermeidet. In der folgenden Untersuchung ersetze ich das Parallelenaxiom durch eine der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie entsprechende Forderung und zeige dann ebenfalls, *daß ausschließlich auf Grund der ebenen Axiome ohne Anwendung von Stetigkeitsaxiomen die Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie in der Ebene möglich ist.*

Diese neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie steht, wie mir scheint, auch hinsichtlich ihrer Einfachheit den bisher bekannten Begründungsarten, nämlich derjenigen von Bolyai und Lobatschefsky, die beide sich der Grenzkugel bedienten, und derjenigen von F. Klein mittels der projektiven Methode nicht nach. Die genannten Begründungen benutzen wesentlich den Raum sowohl wie die Stetigkeit.

Zur Erleichterung des Verständnisses stelle ich nach meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie" die Axiome der ebenen Geometrie zusammen, wie folgt:

I. Axiome der Verknüpfung.

I 1. Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade.

I 2. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

---

1) § 8 S. 16; man vergleiche auch meinen Vortrag über den Zahlbegriff: Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900.

2) Vergleiche auch meine Abhandlung „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck". Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 35. 1903 Anhang II.

I 3. Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.

II. Axiome der Anordnung.

II 1. Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt auch B zwischen C und A.

II 2. Wenn A und B zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es wenigstens einen Punkt C, der zwischen A und B liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß B zwischen A und D liegt.

II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Erklärung: Die zwischen zwei Punkten A und B gelegenen Punkte heißen auch die Punkte der *Strecke* AB oder BA.

II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade, die keinen der Punkte A, B, C trifft; wenn dann diese Gerade durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke BC oder der Strecke AC.

III. Axiome der Kongruenz.

Erklärung: Jede Gerade zerfällt von irgend einem ihrer Punkte aus in zwei *Halbgerade* (Halbstrahlen) oder *Hälften*.

III 1. Wenn A, B zwei Punkte der Geraden a sind und A' ein Punkt einer Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Hälfte der Geraden a' von A' aus stets einen und nur einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist; in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'.$$

Jede Strecke ist sich selbst kongruent; in Zeichen:

$$AB \equiv AB \quad \text{und} \quad BA \equiv AB.$$

III 2. Wenn die Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent.

III 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf einer Geraden a'; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$, so ist auch $AC \equiv A'C'$.

Erklärung. Ein von einem Punkte A ausgehendes Paar von Halbgeraden h und k, die nicht zusammen eine Gerade ausmachen, nennen wir einen *Winkel* und bezeichnen ihn entweder mit

$$\sphericalangle(hk) \quad \text{oder} \quad \sphericalangle(kh).$$

Die Punkte der Ebene, welche bezüglich h auf derselben Seite wie

k und zugleich bezüglich k auf derselben Seite wie h liegen, bilden den *Winkelraum* von $\sphericalangle (hk)$.

III 4. Es sei ein Winkel (hk), eine Gerade a' und eine bestimmte Seite von a' gegeben. Es bedeute h' eine Halbgerade der Geraden a', die vom Punkte O ausgeht: dann gibt es eine und nur eine Halbgerade k', so daß der Winkel (hk) dem Winkel $(h'k')$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen:

$$\sphericalangle (hk) \equiv \sphericalangle (h'k')$$

und daß zugleich alle Punkte des Winkelraums von $\sphericalangle (h'k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen.

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, in Zeichen:

$$\sphericalangle (hk) \equiv \sphericalangle (hk) \quad \text{und} \quad \sphericalangle (hk) \equiv (kh).$$

III 5. Wenn ein Winkel (hk) sowohl dem Winkel $(h'k')$ als auch dem Winkel $(h''k'')$ kongruent ist, so ist auch der Winkel $(h'k')$ dem Winkel $(h''k'')$ kongruent.

III 6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \; AC \equiv A'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, so gilt auch stets

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Aus den Axiomen I—III folgen leicht die Sätze über die Kongruenz der Dreiecke und über das gleichschenklige Dreieck und zugleich erkennt man die Möglichkeit, ein Lot zu errichten oder zu fällen, sowie eine gegebene Strecke oder einen gegebenen Winkel zu halbieren. Insbesondere folgt auch wie bei Euklid der Satz, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist.

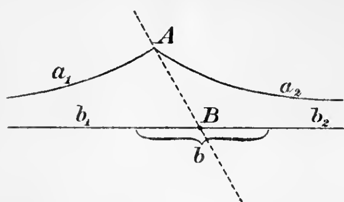
IV. Axiom von den sich schneidenden und nicht schneidenden Geraden.

Wir sprechen nun das Axiom, welches in der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie dem Parallelenaxiom der Euklidischen Geometrie entspricht, wie folgt, aus:

IV. Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgerade a_1, a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.

Erklärung. Die Gerade b zerfalle von irgend einem ihrer Punkte B aus in die beiden Halbgeraden b_1, b_2 und es mögen a_1, b_1 auf der einen und a_2, b_2 auf der anderen Seite der Geraden AB liegen: dann soll die Halbgerade a_1 zu der Halbgeraden b_1 und ebenso die Halbgerade a_2 zu

der Halbgeraden b_2 *parallel* genannt werden; desgleichen sagen wir, es seien die beiden Halbgeraden a_1, a_2 zu der Geraden b *parallel* und auch von jeder der beiden Geraden, von denen a_1 bez. a_2 Halbgerade sind, sagen wir, daß sie zu b *parallel* sind.



Es folgt sofort die Richtigkeit folgender Tatsachen:

Wenn eine Gerade oder Halbgerade zu einer anderen Geraden oder Halbgeraden parallel ist, so ist stets auch diese zu jener parallel.

Wenn zwei Halbgerade einer dritten Halbgeraden parallel sind, so sind sie untereinander parallel.

Erklärung. Jede Halbgerade bestimmt ein *Ende;* von allen Halbgeraden, die zueinander parallel sind, sagen wir, daß sie dasselbe Ende bestimmen. Eine vom Punkte A ausgehende Halbgerade mit dem Ende α werde allgemein mit $(A\alpha)$ bezeichnet. Eine Gerade besitzt stets zwei Enden. Allgemein werde eine Gerade, deren Enden α und β sind, mit (α, β) bezeichnet.

Wenn A, B und A', B' zwei Punktepaare und α und α' zwei Enden von derart sind, daß die Strecken AB und $A'B'$ einander gleich sind und überdies der von AB und der Halbgeraden (A, α) gebildete Winkel gleich dem von $A'B'$ und der Halbgeraden (A', α') gebildeten Winkel wird, so ist, wie man leicht erkennt, stets auch der von BA und (B, α) gebildete Winkel gleich dem von $B'A'$ und $(B'\alpha')$ gebildeten Winkel; die beiden Figuren $AB\alpha$ und $A'B'\alpha'$ heißen einander kongruent.

Endlich definieren wir noch in bekannter Weise den Begriff des Spiegelbildes:

Erklärung. Wenn wir von einem Punkte aus auf eine Gerade das Lot fällen und dieses über seinen Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängern, so heiße der entstehende Endpunkt das *Spiegelbild des ursprünglichen Punktes* an jener Geraden.

Die Spiegelbilder für die Punkte einer Geraden liegen wiederum auf einer Geraden; diese heiße das *Spiegelbild der ursprünglichen Geraden.*

§ 1.

Hilfssätze.

Wir beweisen zunächst der Reihe nach folgende Hilfssätze:

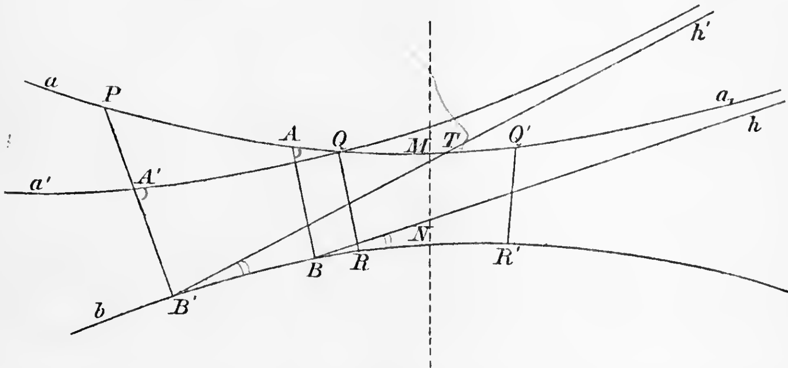
Satz 1. Wenn zwei Gerade eine dritte Gerade unter gleichen Gegenwinkeln schneiden, so sind sie gewiß nicht zueinander parallel.

Beweis. Wir nehmen im Gegenteil an, daß die beiden Geraden nach einer Richtung hin zueinander parallel wären. Führen wir dann um die Mitte der auf der dritten Geraden ausgeschnittenen Strecke eine Halb-

drehung aus, d. h. konstruieren wir über der anderen Seite jener Strecke das betreffende kongruente Dreieck, so würde folgen, daß die beiden ersteren Geraden auch nach der anderen Richtung hin zueinander parallel sind, und dies widerspräche dem Axiom IV.

Satz 2. Wenn irgend zwei Gerade a, b vorgelegt sind, die sich weder schneiden noch zueinander parallel sind, so gibt es stets eine Gerade, welche auf beiden zugleich senkrecht steht.

Beweis. Von irgend zwei Punkten A und P der Geraden a fällen wir die Lote AB und PB' auf die Gerade b. Es sei das Lot PB' größer als das Lot AB: dann tragen wir AB von B' aus auf $B'P$ ab bis A', so daß der Punkt A' zwischen P und B' liegt. Nunmehr konstruieren wir die Gerade a' durch A', welche $B'A'$ in A' unter demselben Winkel



und in demselben Sinne wie die Gerade a das Lot BA in A schneidet. Wir wollen beweisen, daß diese Gerade a' notwendig die Gerade a treffen muß.

Zu dem Zwecke bezeichnen wir diejenige Halbgerade, in welche a von P aus zerfällt und auf welcher der Punkt A liegt, mit a_1 und ziehen dann von B aus eine Halbgerade h parallel zu a_1. Ferner sei h' diejenige Halbgerade, welche von B' unter demselben Winkel gegen b und nach derselben Richtung wie h von B ausgeht. Da nach Satz 1 die Halbgerade h' nicht zu h und daher auch nicht zu a_1 parallel ist und auch h gewiß nicht schneidet, so schneidet sie, wie man im Hinblick auf Axiom IV leicht erkennt, notwendig a_1; es sei T der Schnittpunkt der Halbgeraden h' und a_1. Da a' wegen unserer Konstruktionen parallel zu h' ist, so muß nach Axiom II 4 die Gerade a' das Dreieck $PB'T$ durch die Seite PT verlassen, womit der gewünschte Nachweis erbracht ist. Wir wollen den Schnittpunkt der Geraden a und a' mit Q bezeichnen.

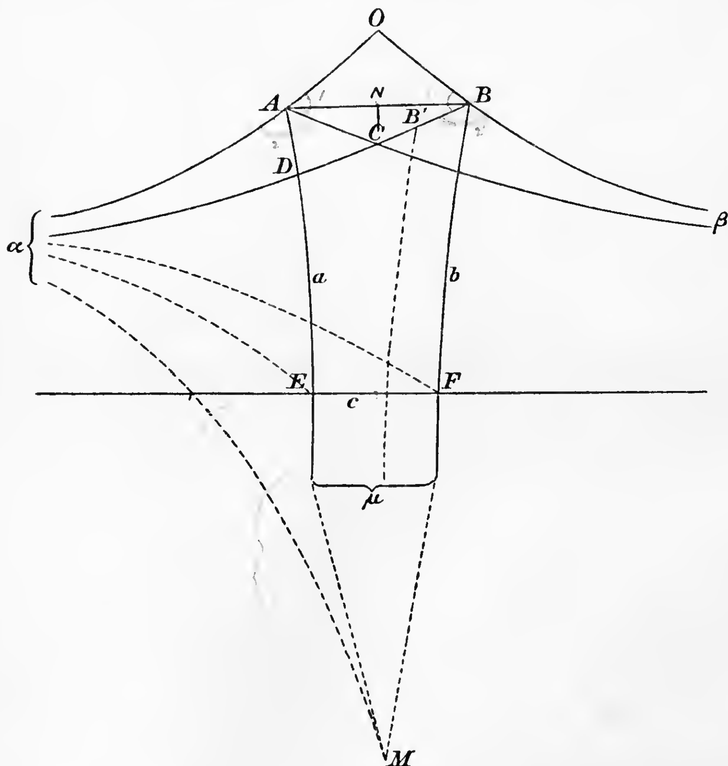
Von Q fällen wir das Lot QR auf b; sodann tragen wir $B'R$ von B aus auf b bis zum Punkte R' ab, so daß auf b die Richtung B nach R' dieselbe, wie die von B' nach R ist. Ebenso tragen wir die Strecke

$A'Q$ von A aus auf a in derselben Richtung bis Q' ab. Suchen wir dann die Mitten M und N der Strecken QQ' bez. RR', so liefert deren Verbindungsgerade MN das gesuchte gemeinsame Lot auf a und b.

In der Tat, aus der Kongruenz der Vierecke $A'B'QR$ und $ABQ'R'$ folgt die Gleichheit der Strecken QR und $Q'R'$, sowie die Tatsache, daß $Q'R'$ auf b senkrecht steht. Hieraus wiederum erschließen wir die Kongruenz der Vierecke $QRMN$ und $Q'R'MN$ und damit ist die aufgestellte Behauptung und zugleich der Satz 2 vollständig bewiesen.

Satz 3. Wenn irgend zwei Halbgeraden vorgelegt sind, so gibt es stets eine Gerade, welche zu diesen beiden Halbgeraden parallel, ist d. h. es gibt stets eine Gerade, die zwei vorgeschriebene Enden α und β besitzt.

Beweis. Wir ziehen durch irgend einen Punkt O zu den vorgelegten



Halbgeraden Parallele und tragen auf diesen von O aus gleiche Strecken ab, etwa bis A und B, so daß

$$OA = OB$$

wird und die von O aus durch A gehende Halbgerade das Ende α und

die von O aus durch B gehende Halbgerade das Ende β besitzt. Sodann verbinden wir den Punkt A mit dem Ende β und halbieren den Winkel zwischen den beiden von A ausgehenden Halbgeraden; desgleichen verbinden wir den Punkt B mit dem Ende α und halbieren den Winkel zwischen den beiden von B ausgehenden Halbgeraden. Die erstere Halbierungslinie werde mit a, die letztere mit b bezeichnet. Aus der Kongruenz der Figuren $OA\beta$ und $OB\alpha$ folgt die Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle(OA\beta) = \sphericalangle(OB\alpha),$$
$$\sphericalangle(\alpha A\beta) = \sphericalangle(\alpha B\beta)$$

und aus letzterer Gleichung entnehmen wir auch die Gleichheit der Winkel, die durch die Halbierungen entstanden sind, nämlich

$$\sphericalangle(\alpha Aa) = \sphericalangle(aA\beta) = \sphericalangle(\alpha Bb) = \sphericalangle(bB\beta).$$

Es kommt zunächst darauf an, zu zeigen, daß die beiden Halbierungslinien a und b sich weder schneiden noch zueinander parallel sind.

Wir nehmen an, a und b schnitten sich im Punkte M. Da OAB nach Konstruktion ein gleichschenkliges Dreieck ist, so folgt

$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO$$

und hieraus nach den vorigen Gleichungen

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle ABM;$$

mithin ist

$$AM = BM.$$

Verbinden wir nun M mit dem Ende α durch eine Halbgerade, so folgt aus der letzteren Streckengleichung und wegen der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(\alpha AM)$ und (αBM) die Kongruenz der Figuren αAM und αBM und diese Kongruenz hätte die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(\alpha MA)$ und $\sphericalangle(\alpha MB)$ zur Folge. Da diese Folgerung offenbar nicht zutrifft, so ist die Annahme zu verwerfen, daß die Halbierungsgeraden a und b sich einander schneiden.

Wir nehmen ferner an, die Geraden a und b seien zueinander parallel; das durch sie bestimmte Ende möge dann mit μ bezeichnet werden. Die von B aus nach α gehende Halbgerade möge die von A nach β gehende Halbgerade im Punkte C und die Gerade a im Punkte D treffen: dann beweisen wir die Gleichheit der Strecken DA und DB. In der Tat, im gegenteiligen Falle tragen wir DA von D aus auf DB etwa bis B' ab und verbinden B' mit μ durch eine Halbgerade. Aus der Kongruenz der Figuren $DA\alpha$ und $DB'\mu$ würde dann die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(DA\alpha)$ und $\sphericalangle(DB'\mu)$ folgen und mithin wären auch die Winkel $\sphericalangle(DB'\mu)$ und $\sphericalangle(DB\mu)$ einander gleich, was nach Satz 1 nicht möglich ist.

Die Gleichheit der Strecken DA und DB hat nun die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(DAB)$ und $\sphericalangle(DBA)$ zur Folge und da nach dem Früheren

* Erect at N the middle point of AB a perpendicular + rotate NBF about it. NBF will coincide with NAE.

auch die Winkel $\sphericalangle(CAB)$ und $\sphericalangle(CBA)$ einander gleich sind, so würde auch die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(DAB)$ und $\sphericalangle(CAB)$ folgen. Diese Folgerung trifft aber offenbar nicht zu und mithin ist auch die Annahme zu verwerfen, daß die Geraden a und b einander parallel sind.

Da nach diesen Entwickelungen die Geraden a, b sich weder schneiden noch zueinander parallel sind, so gibt es nach Satz 2 eine Gerade c, die auf beiden Geraden a, b senkrecht steht etwa in den Punkten E bez. F. Ich behaupte, daß diese Gerade c die gesuchte Gerade ist, die die beiden vorgelegten Enden α, β miteinander verbindet.

Zum Beweise dieser Behauptung nehmen wir im Gegenteil an, es habe c nicht das Ende α. Dann verbinden wir jeden der beiden Fußpunkte E und F mit dem Ende α durch Halbgerade. Da $EA = FB$ sein muß, wie leicht erkannt wird,* so folgt die Kongruenz der Figuren αEA und αFB und aus dieser die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(AE\alpha)$ und $\sphericalangle(BF\alpha)$ und folglich sind auch diejenigen Winkel einander gleich, die die von E und F ausgehenden Halbgeraden mit der Geraden c bilden. Diese Folgerung widerspricht dem Satze 1 und damit ist der Beweis für unsere Behauptung vollständig erbracht.

Satz 4. Es seien a, b zwei zueinander parallele Gerade und O ein Punkt innerhalb des zwischen a und b gelegenen Gebietes der Ebene; ferner sei O_a das Spiegelbild des Punktes O an a und O_b das Spiegelbild des Punktes O an b und M die Mitte der Strecke $O_a O_b$: dann steht diejenige Halbgerade von M aus, die zugleich zu a und b parallel ist, senkrecht in M auf $O_a O_b$.

Beweis. Denn im entgegengesetzten Falle errichte man nach der nämlichen Seite hin in M auf $O_a O_b$ die Senkrechte. Die Gerade $O_a O_b$ schneide a, b bez. in den Punkten P, Q. Da $PO < PQ + QO$, mithin $PO_a < PO_b$ ist und desgleichen $QO_b < QO_a$, so fällt M notwendig in das Innere des zwischen a und b gelegenen Gebietes der Ebene. Jene Senkrechte in M müßte daher eine der Geraden a oder b treffen; träfe sie etwa a im Punkte A, so würde $AO_a = AO$ und $AO_a = AO_b$ folgen und mithin wäre auch $AO = AO_b$ d. h. A müßte auch ein Punkt von b sein, was der Voraussetzung des Satzes widerspräche[1]).

Satz 5. Wenn a, b, c drei Gerade sind, die das nämliche Ende ω

1) Diese Folgerung stimmt im wesentlichen mit einer Schlußweise von Lobatschefsky überein; vgl. Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien (1835) § 111.

besitzen und die Spiegelungen an diesen Geraden bez. mit S_a, S_b, S_c bezeichnet werden, so gibt es stets eine Gerade d mit demselben Ende ω, so daß die aufeinanderfolgende Anwendung der Spiegelungen an den Geraden a, b, c der Spiegelung an der Geraden d gleichkommt, was wir durch die Formel

$$S_c S_b S_a = S_d$$

ausdrücken.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es fiele die Gerade b ins Innere des zwischen a und c gelegenen Gebietes der Ebene. Dann sei O ein Punkt auf b und die Spiegelbilder von O an a und c seien bezeichnet mit O_a und O_c. Bezeichnen wir nun mit d diejenige Gerade, die die Mitte der Strecke $O_a O_c$ mit dem Ende ω verbindet, so sind wegen Satz 4 die Punkte O_a und O_c Spiegelbilder an d und folglich ist die Operation $S_d S_c S_b S_a$ eine solche, die den Punkt O_a sowie diejenige Gerade ungeändert läßt, die O_a mit dem Ende ω verbindet. Da jene Operation überdies aus vier Spiegelungen zusammengesetzt ist, so lehren die Kongruenzsätze, daß jene Operation die Identität ist; hieraus folgt die Behauptung.

Wir erkennen zweitens leicht die Richtigkeit des Satzes 5 in dem Falle, daß die Geraden c und a miteinander übereinstimmen. Ist nämlich b' diejenige Gerade, die aus b durch Spiegelung an der Geraden a hervorgeht, und bezeichnen wir mit $S_{b'}$ die Spiegelung an b', so erkennen wir sofort die Richtigkeit der Formel

$$S_a S_b S_a = S_{b'}.$$

Nunmehr nehmen wir drittens an, es fiele die Gerade c ins Innere des zwischen a und b gelegenen Gebietes der Ebene. Dann gibt es nach dem ersten Teile dieses Beweises gewiß eine Gerade d', so daß die Formel

$$S_a S_c S_b = S_{d'}$$

gilt. Bezeichnen wir mit d das Spiegelbild von d' an a, so ist nach dem zweiten Teile dieses Beweises:

$$S_c S_b S_a = S_a S_a S_c S_b S_a = S_a S_{d'} S_a = S_d$$

Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

§ 2.

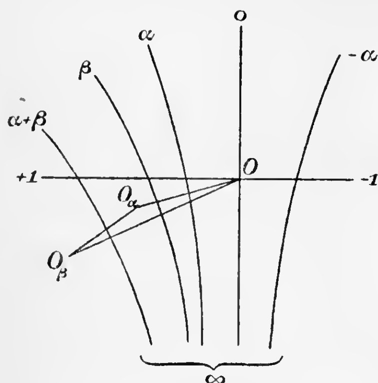
Die Addition der Enden.

Wir nehmen eine bestimmte Gerade an und bezeichnen deren Enden mit 0 und ∞. Auf dieser Geraden $(0, \infty)$ wählen wir einen Punkt O und errichten dann in O ein Lot; die Enden dieses Lotes mögen mit $+1$ und -1 bezeichnet werden.

Wir definieren jetzt die Summe zweier Enden folgendermaßen:

Erklärung. Es seien α, β irgend zwei Enden; ferner sei O_α das

Spiegelbild des Punktes O an der Geraden (α, ∞) und O_β sei das Spiegelbild des Punktes O an der Geraden (β, ∞); die Mitte der Strecke $O_\alpha O_\beta$ verbinden wir mit dem Ende ∞: das andere Ende der so konstruierten Geraden heiße die *Summe der beiden Enden* α *und* β und werde mit $\alpha + \beta$ bezeichnet.



Wenn wir eine Halbgerade mit dem Ende α an der Geraden $(0, \infty)$ spiegeln, so werde das Ende der so entstehenden Halbgeraden mit $-\alpha$ bezeichnet.

Wir erkennen leicht die Richtigkeit der Gleichungen.

$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$1 + (-1) = 0,$$
$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Die letzte Gleichung spricht *das kommutative Gesetz für die Addition von Enden* aus.

Um *das assoziative Gesetz für die Addition von Enden* zu beweisen, bezeichnen wir mit S_0, S_α, S_β bez. die Spiegelungen an den Geraden $(0, \infty)$, (α, ∞), (β, ∞): nach Satz 5 in § 1 gibt es dann gewiß eine Gerade (σ, ∞), so daß für die Spiegelung S_σ an dieser Geraden die Formel

(2) $$S_\sigma = S_\beta S_0 S_\alpha$$

gilt. Da bei der Operation $S_\beta S_0 S_\alpha$ der Punkt O_α in den Punkt O_β übergeht, so ist notwendig O_β das Spiegelbild von O_α an der Geraden (σ, ∞) und folglich wird $\sigma = \alpha + \beta$, d. h. es gilt die Formel

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha.$$

Bezeichnet γ ebenfalls ein Ende, so lehrt die wiederholte Anwendung der eben gefundenen Formel:

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{\beta+\gamma} S_0 S_\alpha = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha,$$
$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_\gamma S_0 S_{\alpha+\beta} = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha$$

und folglich ist

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{(\alpha+\beta)+\gamma}$$

und mithin auch

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Die vorhin abgeleitete Formel

(1) $$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha$$

lehrt zugleich, daß die angegebene Konstruktion der Summe zweier Enden von der getroffenen Wahl des Punktes O auf der Geraden $(0, \infty)$ unabhängig* ist. Bezeichnet mithin O' irgend einen von O verschiedenen

* The existence of σ is independent of the choice of O. Any other pt. O' would serve as well as O to show that σ must be identical with α+β. In other words the formula (1) does not imply O.

Punkt der Geraden $(0, \infty)$ und sind O'_α, O'_β die Spiegelbilder des Punktes O' bez. an den Geraden (α, ∞), (β, ∞), so ist die Mittelsenkrechte auf $O'_\alpha O'_\beta$ wiederum die Gerade $(\alpha + \beta, \infty)$.

Wir führen hier noch eine Tatsache an, deren Kenntnis für unsere Entwickelungen in § 4 nötig ist.

Wenn wir die Gerade (α, ∞) an der Geraden (β, ∞) spiegeln, so entsteht die Gerade $(2\beta - \alpha, \infty)$.

In der Tat, ist P irgend ein Punkt derjenigen Geraden, die aus (α, ∞) durch Spiegelung an (β, ∞) vorgeht, so bleibt derselbe offenbar ungeändert, wenn wir auf ihn der Reihe nach die Spiegelungen

$$S_\beta, S_0, S_{-\alpha}, S_0, S_\beta$$

anwenden. Wegen der obigen Formel ist aber

$$S_\beta S_0 S_{-\alpha} S_0 S_\beta = S_{2\beta-\alpha},$$

d. h. jener zusammengesetzte Prozeß kommt einer Spiegelung an der Geraden $(2\beta - \alpha, \infty)$ gleich; der Punkt P liegt mithin notwendig auf der letzteren Geraden.

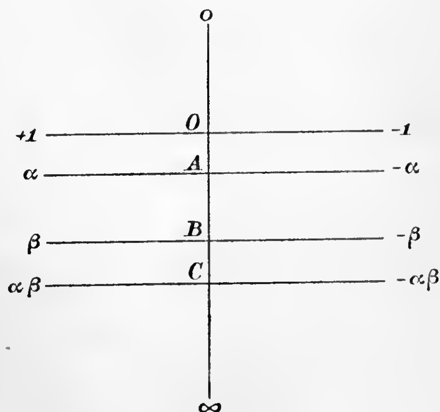
§ 3.

Die Multiplikation der Enden.

Wir definieren jetzt das Produkt zweier Enden folgendermaßen:

Erklärung. Wenn ein Ende auf derselben Seite der Geraden $(0, \infty)$ wie das Ende $+1$ liegt, so heiße das Ende *positiv* und wenn ein Ende auf derselben Seite der Geraden $(0, \infty)$ wie das Ende -1 liegt, so heiße das Ende *negativ*.

Es seien nun α, β irgend zwei von 0 und ∞ verschiedene Enden. Die beiden Geraden $(\alpha, -\alpha)$ und $(\beta, -\beta)$ stehen senkrecht auf der Geraden $(0, \infty)$; sie mögen diese Gerade bez. in A und B schneiden. Ferner tragen wir die Strecke OA von B aus auf der Geraden $(0, \infty)$ bis C in der Weise ab, daß auf der Geraden $(0, \infty)$ die Richtung von O nach A die nämliche wie die Richtung von B nach C ist: dann konstruieren wir in C auf der Geraden $(0, \infty)$ die Senkrechte und bezeichnen das positive *oder* das negative Ende dieser Senkrechten als das *Produkt* $\alpha\beta$ *der beiden Enden* α, β,



jenachdem diese Enden entweder beide positiv bez. beide negativ *oder* eines positiv und das andere negativ ist.

Wir setzen endlich die Formel

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

fest.

Auf Grund der Axiome III, 1—3 über die Kongruenz von Strecken erkennen wir unmittelbar die Gültigkeit der Formeln

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$
$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

d. h es gilt sowohl das *kommutative* wie auch das *assoziative Gesetz für die Multiplikation von Enden.*

Auch finden wir leicht, daß die Formeln

$$1 \cdot \alpha = \alpha, \quad (-1)\alpha = -\alpha.$$

gelten und daß, wenn die Enden α, β einer Geraden die Gleichung

$$\alpha\beta = -1$$

erfüllen, diese durch den Punkt O gehen muß.

Die Möglichkeit der Division erhellt unmittelbar; auch gibt es zu jedem positiven Ende π stets ein positives (und ebenso ein negatives) Ende, dessen Quadrat jenem Ende π gleich wird und welches daher mit $\sqrt{\pi}$ bezeichnet werden möge.

Um das distributive Gesetz für die Rechnung mit Enden zu beweisen, konstruieren wir zunächst aus den Enden β und γ auf die in § 2 angegebene Weise das Ende $\beta + \gamma$. Suchen wir sodann auf die eben angegebene Weise die Enden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha(\beta + \gamma)$, so erkennen wir, daß diese Konstruktion auf einer Verschiebung der Ebene längs der Geraden $(0, \infty)$ um die Strecke OA hinausläuft, und wenn wir demnach die Summe der Enden $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ durch eine Konstruktion von A aus anstatt von O aus ermitteln — was nach

einer der Bemerkungen in § 2 gestattet ist —, so ergibt sich in der Tat für diese Summe das Ende $\alpha(\beta+\gamma)$, d. h. es gilt die Formel:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma).$$

§ 4.

Die Gleichung des Punktes.

Nachdem wir in § 2—§ 3 erkannt haben, daß für die Rechnung mit Enden die nämlichen Regeln gelten, wie für die Rechnung mit gewöhnlichen Zahlen, bietet der Aufbau der Geometrie keine weiteren Schwierigkeiten; er geschehe etwa in folgender Weise:

Wenn ξ, η die Enden irgend einer Geraden sind, so mögen die Enden

$$u = \xi\eta,$$
$$v = \frac{\xi+\eta}{2}$$

die *Koordinaten* jener Geraden heißen. Es gilt die fundamentale Tatsache:

Wenn α, β, γ drei Enden von solcher Beschaffenheit sind, daß das Ende $4\alpha\gamma - \beta^2$ positiv ausfällt, so laufen die sämtlichen Geraden, deren Koordinaten u, v der Gleichung

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

genügen, durch einen Punkt.

Beweis. Konstruieren wir gemäß § 2—§ 3 die Enden

$$\varkappa = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}, \qquad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}},$$

so nimmt mit Rücksicht auf die Bedeutung der Koordinaten u, v und da jedenfalls $\alpha \neq 0$ ist, die vorgelegte lineare Gleichung die Gestalt an

$$(\varkappa\xi + \lambda)(\varkappa\eta + \lambda) = -1.$$

Wir wollen nunmehr die Transformation eines willkürlich veränderlichen Endes ω untersuchen, welche durch die Formel

$$\omega' = \varkappa\omega + \lambda$$

vermittelt wird. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Transformationen

$$\omega' = \varkappa\omega \quad \text{und} \quad \omega' = \omega + \lambda.$$

Was die erstere Transformation betrifft, so kommt offenbar die Multiplikation des willkürlichen Endes ω mit einer Konstanten $\varkappa$ nach § 3 einer Verschiebung der Ebene längs der Geraden $(0, \infty)$ um eine gewisse von $\varkappa$ abhängige Strecke gleich.

Aber auch der letzteren Transformation, d. h. der Zufügung des Endes λ zu dem willkürlich veränderlichen Ende ω, entspricht eine gewisse nur

von λ abhängige Bewegung der Ebene in sich, nämlich eine solche, die sich als eine Drehung der Ebene um das Ende ∞ auffassen läßt.

Um dies einzusehen, bedenken wir, daß nach den Darlegungen am Schluß von § 2 die Gerade (ω, ∞) durch Spiegelung an der Geraden $(0, \infty)$ in die Gerade $(-\omega, \infty)$ und diese wiederum durch Spiegelung an der Geraden $\left(\frac{\lambda}{2}, \infty\right)$ in die Gerade $(\omega + \lambda, \infty)$ übergeht, d. h. die Hinzufügung des Endes λ zu dem willkürlich veränderlichen Ende ω kommt den nacheinander ausgeführten Spiegelungen an den Geraden $(0, \infty)$ und $\left(\frac{\lambda}{2}, \infty\right)$ gleich.

Aus dem eben Bewiesenen folgt, daß, wenn ξ, η die Enden einer Geraden sind, durch die Formeln

$$\xi' = \varkappa\xi + \lambda,$$
$$\eta' = \varkappa\eta + \lambda$$

sich die Enden einer solchen Geraden bestimmen, die durch eine gewisse allein von $\varkappa$, λ abhängige Bewegung der Ebene aus der Geraden mit den Enden ξ, η hervorgeht. Da aber die obige Gleichung

$$(\varkappa\xi + \lambda)(\varkappa\eta + \lambda) = -1$$

für die Enden ξ', η' die Relation

$$\xi'\eta' = -1$$

zur Folge hat und nach einer Bemerkung in § 3 diese Relation die Bedingung dafür ist, daß die betreffenden Geraden durch den Punkt O laufen, so ersehen wir, daß auch alle der ursprünglichen Gleichung

$$(\varkappa\xi + \lambda)(\varkappa\eta + \lambda) = -1$$

genügenden Geraden (ξ, η) durch einen Punkt laufen, und damit ist der Beweis für den aufgestellten Satz vollkommen erbracht.

Nachdem wir erkannt haben, daß die Gleichung des Punktes in Linienkoordinaten eine lineare ist, folgern wir leicht den speziellen Pascalschen Satz für das Geradenpaar und den Desarguesschen Satz über perspektiv liegende Dreiecke, sowie die übrigen Sätze der projektiven Geometrie. Auch sind dann die bekannten Formeln der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie ohne Schwierigkeit ableitbar und damit ist der Aufbau dieser Geometrie mit alleiniger Hilfe der Axiome I—IV vollendet.

Anhang IV.

Über die Grundlagen der Geometrie[1]).

Die Untersuchungen von *Riemann* und *Helmholtz* über die Grundlagen der Geometrie veranlaßten Lie, das Problem der axiomatischen Behandlung der Geometrie unter Voranstellung des Gruppenbegriffes in Angriff zu nehmen, und führten diesen scharfsinnigen Mathematiker zu einem System von Axiomen, von denen er mittels seiner Theorie der Transformationsgruppen nachwies, daß sie zum Aufbau der Geometrie hinreichend sind[2]).

Nun hat Lie bei Begründung seiner Theorie der Transformationsgruppen stets die Annahme gemacht, daß die die Gruppe definierenden Funktionen differenziert werden können, und daher bleibt in den *Lie*schen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzierbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie tatsächlich unvermeidlich ist oder ob die Differenzierbarkeit der betreffenden Funktionen nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Auch ist *Lie* zufolge seines Verfahrens genötigt, ausdrücklich das Axiom aufzustellen, daß die Gruppe der Bewegungen von infinitesimalen Transformationen erzeugt sei. Diese Forderungen, sowie wesentliche Bestandteile der übrigen von *Lie* zu Grunde gelegten Axiome bezüglich der Natur der die Punkte in gleicher Entfernung definierenden Gleichung lassen sich rein geometrisch nur auf recht gezwungene und komplizierte Weise zum Ausdruck bringen und scheinen überdies nur durch die von *Lie* benutzte analytische Methode, nicht durch das Problem selbst bedingt.

Ich habe daher im folgenden für die ebene Geometrie ein System von Axiomen aufzustellen gesucht, welches, ebenfalls auf dem Begriff der Gruppe beruhend, nur einfache und geometrisch übersichtliche Forderungen enthält und insbesondere die Differenzierbarkeit der die Bewegung vermittelnden Funktionen keineswegs voraussetzt. Die Axiome des von mir aufgestellten Systems sind als spezielle Bestandteile in den *Lie*schen Axiomen enthalten oder, wie ich glaube, aus ihnen sofort ableitbar.

Meine Beweisführung ist völlig von der Methode *Lies* verschieden: ich operiere vornehmlich mit den von *G. Cantor* ausgebildeten Begriffen der Theorie der Punktmengen und benutze den Satz von *C. Jordan,* wonach

---

1) Zur Kennzeichnung der nachfolgenden Begründungsweise der Geometrie im Vergleich mit dem in meiner Festschrift befolgten Verfahren sehe man die am Schluß dieser Abhandlung gemachte Bemerkung (S. 162).

2) *Lie-Engel,* Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3 Abteilung 5.

jede ebene stetig geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte die Ebene in ein inneres und ein äußeres Gebiet teilt.

Gewiß sind auch in dem von mir aufgestellten System noch einzelne Bestandteile entbehrlich; doch habe ich von einer weiteren Untersuchung dieses Umstandes abgesehen aus Rücksicht auf die einfache Fassung der Axiome und vor allem, weil ich eine verhältnismäßig zu komplizierte und geometrisch nicht übersichtliche Beweisführung vermeiden wollte.

Ich behandle im folgenden die Axiome nur für die Ebene, obwohl ich meine, daß ein analoges Axiomensystem für den Raum aufgestellt werden kann, das den Aufbau der räumlichen Geometrie in analoger Weise ermöglicht[1]).

Wir schicken einige Erklärungen voran.

Erklärungen. Wir verstehen unter der *Zahlenebene* die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y.

Eine doppelpunktlose und einschließlich ihrer Endpunkte stetige Kurve in dieser Zahlenebene heiße eine *Jordansche Kurve.* Ist eine Jordansche Kurve geschlossen, so heiße das Innere des von derselben begrenzten Gebietes der Zahlenebene ein *Jordansches Gebiet.*

Der leichteren Darstellung und Faßlichkeit wegen will ich in der vorliegenden Untersuchung die Definition der Ebene enger fassen, als es meine Beweisführung erfordert[2]), ich will nämlich annehmen, daß es

1) Durch die nachfolgende Untersuchung wird zugleich, wie ich glaube, eine allgemeine die Gruppentheorie betreffende Frage, die ich in meinem Vortrag „Mathematische Probleme", Göttinger Nachrichten 1900, S. 17 aufgeworfen habe, für den speziellen Fall der Gruppe der Bewegungen in der Ebene beantwortet.

2) Betreffs der weiteren Fassung des Begriffes der Ebene vergleiche man meine Note über die Grundlagen der Geometrie in den Göttinger Nachrichten 1902. Ich habe daselbst die folgende allgemeinere Definition der Ebene aufgestellt:

Die Ebene ist ein System von Dingen, welche Punkte heißen. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Teilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen.

Die Punkte einer Umgebung lassen sich stets umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines gewissen Jordanschen Gebietes in der Zahlenebene abbilden. Das Jordansche Gebiet wird ein Bild jener Umgebung genannt.

Jedes in einem Bilde enthaltene Jordansche Gebiet, innerhalb dessen der Punkt A liegt, ist wiederum ein Bild einer Umgebung von A. Liegen verschiedene Bilder einer Umgebung vor, so ist die dadurch vermittelte umkehrbar eindeutige Transformation der betreffenden Jordanschen Gebiete aufeinander eine stetige.

Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes A gibt es stets eine solche Umgebung des Punktes A, die beiden Umgebungen gemeinsam ist.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so gibt es stets eine Umgebung von A, die zugleich den Punkt B enthält.

möglich ist, die sämtlichen Punkte unserer Geometrie zugleich auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein bestimmtes Teilsystem derselben umkehrbar eindeutig abzubilden, so daß dann jeder Punkt unserer Geometrie durch ein bestimmtes Zahlenpaar x, y charakterisiert ist. Wir formulieren diese Fassung des Begriffes der Ebene wie folgt:

Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Dingen, die Punkte heißen, und die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Teilsystem derselben abbilden lassen; diese Punkte der Zahlenebene (d. h. die Bildpunkte) werden auch zugleich zur Bezeichnung der Punkte unserer Ebene selbst verwandt.

Zu jedem Punkte A unserer Ebene gibt es in der Zahlenebene Jordansche Gebiete, in denen der Bildpunkt von A liegt und deren sämtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Ebene darstellen. Diese Jordanschen Gebiete heißen Umgebungen des Punktes A.

Jedes in einer Umgebung von A enthaltene Jordansche Gebiet, innerhalb dessen der Punkt A (Bildpunkt von A) liegt, ist wiederum eine Umgebung von A.

Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so gibt es stets eine Umgebung von A, die zugleich den Punkt B enthält.

Wir werden die Bewegung als eine umkehrbar eindeutige Transformation unserer Ebene in sich definieren. Offenbar lassen sich von vornherein zwei Arten von umkehrbar eindeutigen stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich unterscheiden. Nehmen wir nämlich irgend eine geschlossene Jordansche Kurve in der Zahlenebene an und denken uns dieselbe in einem bestimmten Sinn durchlaufen, so geht dieselbe bei einer solchen Transformation wiederum in eine geschlossene Jordansche Kurve über, die in einem gewissen Sinne umlaufen wird. Wir wollen nun in der gegenwärtigen Untersuchung annehmen, daß dieser Umlaufssinn derselbe ist, wie für die ursprüngliche Jordansche Kurve, wenn wir eine

---

Diese Forderungen enthalten, wie mir scheint, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den *Riemann* und *Helmholtz* als „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit" und *Lie* als „Zahlenmannigfaltigkeit" bezeichneten und ihren gesamten Untersuchungen zu Grunde legten. Auch bieten sie die Grundlage für eine strenge axiomatische Behandlung der Analysis situs.

Indem wir die obige engere Definition der Ebene annehmen, wird offenbar die elliptische Geometrie von vornherein ausgeschlossen, da sich deren Punkte nicht in einer mit unseren Axiomen verträglichen Weise auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. Es ist jedoch nicht schwer, die Abänderungen zu erkennen, die in unserer Beweisführung nötig sind, wenn man die weitere Fassung des Begriffes der Ebene zu Grunde legt.

Transformation der Zahlenebene in sich anwenden, welche eine Bewegung definiert. Diese Annahme[1]) bedingt folgende Fassung des Begriffes der Bewegung:

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, daß dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordanschen Kurve stets derselbe bleibt.

Eine Bewegung, bei welcher ein Punkt M ungeändert bleibt, heißt eine Drehung um den Punkt M.

Nach Festlegung des Begriffes „Ebene" und „Bewegung" stellen wir folgende drei Axiome auf:

Axiom I. Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung.

Wir sagen kurz:

Axiom I. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Axiom II. Wenn A und M beliebige voneinander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.

Nennen wir die Gesamtheit derjenigen Punkte, die durch die sämtlichen Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen *wahren* Kreis in unserer ebenen Geometrie, so können wir die Aussage des Axioms II auch so fassen:

Axiom II. Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Dem letzten Axiom schicken wir eine Erklärung voraus.

Erklärung. Es sei AB ein bestimmtes Punktepaar in unserer Geometrie; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieses Punktepaares in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A und B in der Zahlenebene je eine Umgebung α bez. β ab. Wenn ein Punkt A^* in die Umgebung α und zugleich ein Punkt B^* in die Umgebung β fällt, so sagen wir: das Punktepaar A^*B^* liegt in der Umgebung $\alpha\beta$ von AB. Die Aussage, daß diese Umgebung $\alpha\beta$ beliebig

---

1) Bei *Lie* ist diese Annahme in der Forderung enthalten, daß die Gruppe der Bewegungen durch infinitesimale Transformationen erzeugt sei. Die entgegengesetzte Annahme (d. h. die Annahme der Möglichkeit von Umlegungen) würde wesentlich die Beweisführung erleichtern, insofern alsdann die „wahre Gerade" unmittelbar als der Ort derjenigen Punkte definiert werden kann, welche bei einer den Umlaufssinn ändernden Transformation (Umlegung) fest bleiben.

klein sei, soll bedeuten, daß α eine beliebig kleine Umgebung von A und zugleich β eine beliebig kleine Umgebung von B ist.

Es sei ABC ein bestimmtes Punktetripel in unserer Geometrie; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieses Punktetripels in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A, B, C in der Zahlenebene je eine Umgebung α bez. β bez. γ ab. Wenn ein Punkt A^* in die Umgebung α und zugleich ein Punkt B^* in die Umgebung β und ein Punkt C^* in die Umgebung γ fällt, so sagen wir: das Punktetripel $A^*B^*C^*$ liegt in der Umgebung $\alpha\beta\gamma$ von ABC. Die Aussage, daß diese Umgebung $\alpha\beta\gamma$ beliebig klein sei, soll bedeuten, daß α ein beliebig kleine Umgebung von A und zugleich β eine beliebig kleine Umgebung von B und γ eine beliebig kleine Umgebung von C ist.

Beim Gebrauch der Worte „Punktepaar" und „Punktetripel" wird nicht angenommen, daß die Punkte des Punktepaares oder des Punktetripels voneinander verschieden sind.

Axiom III. Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht[1].

Die Aussage dieses Axioms wollen wir kurz so ausdrücken:

Axiom III. Die Bewegungen bilden ein abgeschlossenes System.

Wenn wir in Axiom III gewisse Punkte der Punktetripel zusammenfallen lassen, so ergeben sich leicht einige spezielle Fälle des Axioms III, die wir noch besonders hervorheben, wie folgt:

Wenn es Drehungen um einen Punkt M gibt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Drehungen um den Punkt M gibt, durch welche Punkte in beliebiger Nähe des Punktes A in beliebige Nähe von A' übergeführt

---

1) Es genügt Axiom III für genügend kleine Umgebungen als erfüllt anzunehmen, wie es ähnlich auch bei *Lie* geschieht; meine Beweisführung läßt sich so abändern, daß nur diese engere Annahme darin benutzt wird.

werden können, so gibt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche A genau in A' übergeht.

Diesen letzten Spezialfall des Axioms III werde ich bei der nachfolgenden Beweisführung oftmals in der Weise anwenden, daß für A der Punkt M eintritt[1]).

Ich beweise nun folgende Behauptung:

Eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I—III *erfüllt sind, ist entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschefskysche ebene Geometrie.*

Wollen wir allein die Euklidische Geometrie erhalten, so haben wir nur nötig, bei Axiom I den Zusatz zu machen, daß die Gruppe der Bewegungen eine invariante Untergruppe besitzen soll. Dieser Zusatz vertritt die Stelle des Parallelenaxioms.

Den Gedankengang meiner Beweisführung möchte ich kurz wie folgt skizzieren:

In der Umgebung irgend eines Punktes M wird durch ein besonderes Verfahren ein gewisses Punktgebilde kk und auf diesem ein gewisser Punkt konstruiert (§ 1—§ 2) und dann der wahre Kreis $\varkappa$ durch K um M der Untersuchung unterworfen (§ 3). Es ergibt sich, daß der wahre Kreis $\varkappa$ eine abgeschlossene und in sich dichte, d. h. eine perfekte Punktmenge ist.

Das nächste Ziel unserer Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, daß der wahre Kreis $\varkappa$ eine geschlossene Jordansche Kurve ist[2]). Dies gelingt, indem wir zunächst die Möglichkeit einer Anordnung der Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ erkennen (§ 4—§ 5), hieraus eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von $\varkappa$ auf die Punkte eines gewöhnlichen Kreises schließen (§ 6—§ 7) und endlich beweisen, daß diese Abbildung notwendig eine stetige sein muß (§ 8). Nunmehr ergibt sich auch, daß das ursprünglich konstruierte Punktgebilde kk mit dem wahren Kreise $\varkappa$ identisch ist (§ 9). Weiter gilt der Satz, daß jeder wahre Kreis innerhalb $\varkappa$ ebenfalls eine geschlossene Jordansche Kurve ist (§ 10—§ 12).

---

1) Eine Folgerung, die ich im mündlichen Vortrage in der Festsitzung zur Jubelfeier der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 als besonderes Axiom aufgeführt habe, ist diese: „Irgend zwei Punkte können durch Bewegung niemals in beliebige Nähe zu einander geraten.“ Es wäre zu untersuchen, inwieweit bez. mit welchen Forderungen zusammen diese Forderung das oben aufgestellte Axiom III zu ersetzen im stande ist.

2) Vgl. hierzu die ein ähnliches Ziel verfolgende interessante Note von A. Schönflies: „Über einen grundlegenden Satz der Analysis Situs“ Göttinger Nachrichten. 1902.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Gruppe der Transformationen, die bei den Drehungen der Ebene um M der wahre Kreis $\varkappa$ in sich erfährt (§ 13). Diese Gruppe besitzt folgende Eigenschaften: 1) Jede Drehung um M, die einen Punkt von $\varkappa$ festläßt, läßt alle Punkte desselben fest (§ 14). 2) Es gibt stets eine Drehung um M, die irgend einen gegebenen Punkt von $\varkappa$ in irgend einen anderen Punkt von $\varkappa$ überführt (§ 15). 3) Die Gruppe der Drehungen um M ist eine stetige (§ 16). Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen, die allen Drehungen des wahren Kreises in sich entsprechen. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf: Die Gruppe aller Transformationen des wahren Kreises $\varkappa$ in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des gewöhnlichen Kreises in sich (§ 17—§ 18).

Nunmehr untersuchen wir die Gruppe der Transformationen *aller* Punkte unserer Ebene bei Drehungen um M. Es gilt der Satz, daß es außer der Identität keine Drehung der Ebene um M gibt, welche jeden Punkt eines wahren Kreises μ festläßt (§ 19). Wir erkennen jetzt, daß *jeder* wahre Kreis eine geschlossene Jordansche Kurve ist, und gewinnen Formeln für die Transformationen jener Gruppe aller Drehungen um M (§ 20—§ 21). Endlich folgen leicht die Sätze: Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene läßt sich durch eine geeignete Bewegung in jeden anderen Punkt der Ebene überführen (§ 22).

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie zu definieren und die für den Aufbau der Geometrie notwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln. Zunächst werden die Begriffe Halbdrehung und Mitte einer Strecke definiert (§ 23). Eine Strecke hat höchstens eine Mitte (§ 24) und wenn man von einer Strecke ihre Mitte kennt, so folgt, daß auch jede kleinere Strecke eine Mitte besitzt (§ 25—§ 26).

Um die Lage der Streckenmitten zu beurteilen, haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nötig, und zwar kommt es vor allem darauf an, zwei zueinander kongruente Kreise zu konstruieren, die sich einander von außen in einem und nur in einem Punkte berühren (§ 27). Wir leiten ferner einen allgemeinen Satz über Kreise, die sich von innen berühren, ab (§ 28) und sodann einen Satz über den besonderen Fall, daß der von innen berührende Kreis durch den Mittelpunkt des berührten Kreises geht (§ 29).

Nunmehr wird eine bestimmte genügend kleine Strecke als Einheitsstrecke zu Grunde gelegt und aus dieser durch fortgesetzte Halbierung und Halbdrehung ein System von Punkten von der Art konstruiert, daß

jedem Punkte dieses Systems eine bestimmte Zahl a zugeordnet erscheint, die rational ist und nur eine Potenz von 2 als Nenner hat (§ 30). Nach Aufstellung eines Gesetzes über diese Zuordnung (§ 31) werden die Punkte des gewonnenen Punktsystems untereinander angeordnet, wobei die früheren Sätze über sich berührende Kreise zur Geltung kommen (§ 32). Jetzt gelingt der Nachweis, daß die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ entsprechenden Punkte gegen den Punkt 0 konvergieren (§ 33). Dieser Satz wird schrittweise verallgemeinert, bis wir schließlich erkennen, daß eine jede Punktreihe unseres Systems konvergiert, sobald die entsprechende Zahlenreihe konvergiert (§ 34—§ 35).

Nach diesen Vorbereitungen gelingt die Definition der wahren Geraden als eines Systems von Punkten, die aus zwei zu Grunde gelegten Punkten entstehen, wenn man fortgesetzt die Mitten nimmt, Halbdrehungen ausführt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt (§ 36). Sodann können wir beweisen, daß die wahre Gerade eine stetige Kurve ist (§ 37), keinen Doppelpunkt besitzt (§ 38) und mit irgend einer anderen wahren Geraden höchstens einen Punkt gemein hat (§ 39). Es ergibt sich ferner, daß die wahre Gerade jeden um einen ihrer Punkte gelegten Kreis schneidet, und hieraus folgt, daß man irgend zwei beliebige Punkte der Ebene stets durch eine wahre Gerade verbinden kann (§ 40). Auch erkennen wir in unserer Geometrie die Kongruenzsätze als gültig, wobei sich jedoch zwei Dreiecke nur dann als kongruent erweisen, wenn für sie auch der Umlaufssinn der gleiche ist (§ 41).

Hinsichtlich der Lage des Systems aller wahren Geraden gegeneinander sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Parallelenaxiom gültig ist oder durch jeden Punkt zu einer gegebenen Geraden zwei Gerade existieren, die die schneidenden Geraden von den nicht schneidenden Geraden abgrenzen. Im ersteren Falle gelangen wir zur Euklidischen, im letzteren zur Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie (§ 42).

---

§ 1.

Es sei M irgend ein Punkt in unserer Geometrie und zugleich der Bildpunkt in der Zahlenebene x, y. Unser nächstes Ziel ist dann, um M gewisse Punktgebilde zu konstruieren, die sich schließlich als die wahren Kreise um M herausstellen werden.

Wir schlagen in der Zahlenebene um M einen „Zahlenkreis“, d. h. einen Kreis $\mathfrak{K}$ im Sinne der gewöhnlichen Maßbestimmung, so klein, daß sämtliche Punkte innerhalb und auf diesem Kreise $\mathfrak{K}$ ebenfalls Bildpunkte sind

und es auch Punkte außerhalb $\mathfrak{K}$ gibt. Dann gibt es gewiß einen zu $\mathfrak{K}$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{k}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ von der Art, daß sämtliche Bildpunkte innerhalb dieses Kreises $\mathfrak{k}$ bei beliebigen Drehungen um M innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ bleiben.

Um dies zu beweisen, betrachten wir in der Zahlenebene eine unendliche Reihe von konzentrischen Zahlenkreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots$ mit abnehmenden und gegen 0 konvergierenden Radien und nehmen dann im Gegensatz zur Behauptung in jedem dieser Kreise einen Bildpunkt von der Art an, daß derselbe bei einer gewissen Drehung um M an eine außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Stelle kommt oder auf die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ rückt: es sei A_i ein solcher im Kreise $\mathfrak{k}_i$ gelegener Bildpunkt, der bei der Drehung Δ_i in eine außerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ oder auf demselben gelegene Stelle übergeht. Wir denken uns dann von M nach jedem Punkte A_i den Radius r_i des betreffenden Zahlenkreises $\mathfrak{k}_i$ gezogen und fassen die Kurve γ_i ins Auge, in welche der Radius r_i bei der Drehung Δ_i übergeht. Da diese Kurve γ_i vom Punkte M nach einer gewissen Stelle außerhalb oder auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ läuft, so muß sie notwendig die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ treffen; es sei B_i einer dieser Treffpunkte und B eine Verdichtungsstelle der Treffpunkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Nun sei allgemein C_i derjenige Punkt auf dem Radius r_i, der bei der Drehung Δ_i in B_i übergeht. Da die Punkte $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gegen M konvergieren, so gibt es nach Axiom III eine Drehung um M, bei welcher der auf der Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt B in den Punkt M übergeht. Dies widerspricht dem vorhin definierten Begriff der Bewegung.

§ 2.

Wie bereits in § 1 festgesetzt, sei $\mathfrak{k}$ ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{K}$, der die Bedingungen des dort bewiesenen Satzes erfüllt, so daß sämtliche Bildpunkte innerhalb $\mathfrak{k}$ bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{K}$ bleiben; ferner sei k ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{k}$, dessen sämtliche Punkte bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{k}$ bleiben. Dann bezeichnen wir kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt* und diejenigen Punkte, die bei keiner Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *unbedeckt*. Aus Axiom III folgt sofort, daß die bedeckten Punkte eine abgeschlossene Punktmenge bilden. Ferner sei A ein bestimmter Punkt außerhalb $\mathfrak{K}$, welcher Bildpunkt für einen Punkt unserer Geometrie ist. Wenn sich nun ein unbedeckter Punkt A' durch eine Jordansche Kurve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit A verbinden läßt, so heiße A' *außerhalb* kk gelegen. Insbesondere sind alle Punkte außerhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ gewiß außerhalb kk gelegene Punkte. Jeder bedeckte

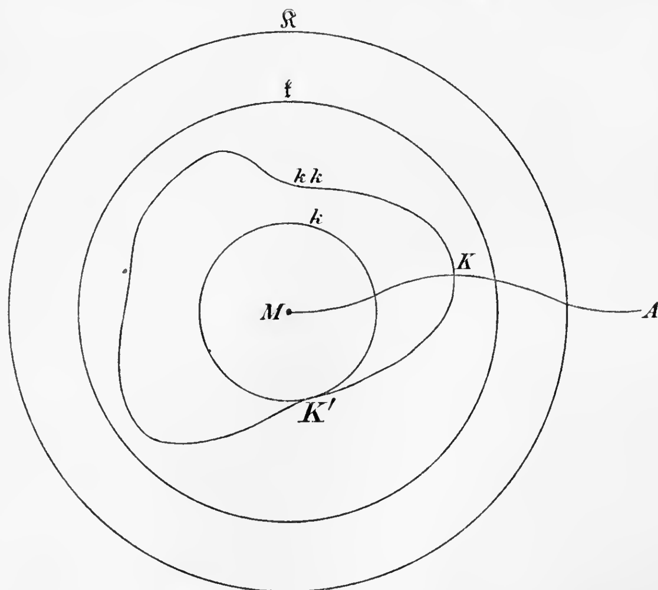
Punkt, zu dem in beliebig kleiner Umgebung sich Punkte außerhalb kk befinden, heiße ein Punkt *auf* kk. Die Punkte auf kk bilden eine abgeschlossene Punktmenge. Diejenigen Punkte J, die weder Punkte außerhalb kk noch Punkte auf kk sind, sollen Punkte *innerhalb* kk heißen. Insbesondere sind also alle bedeckten Punkte, zu welchen nicht in beliebiger Nähe unbedeckte Punkte liegen, wie z. B. der Punkt M und die Punkte innerhalb k, sicher innerhalb kk gelegen.

§ 3.

Indem wir bedenken, daß, wie $\mathfrak{k}$ bestimmt war, A bei den Drehungen um M niemals in das Innere von $\mathfrak{k}$ hineingelangt, erkennen wir, daß bei einer jeden Drehung um M die Punkte außerhalb kk wieder in Punkte außerhalb kk, ferner die Punkte auf kk wieder in Punkte auf kk und die Punkte innerhalb kk wiederum in Punkte innerhalb kk übergehen.

Jeder Punkt auf kk ist nach unserer Festsetzung ein bedeckter Punkt, und da wir wissen, daß die Punkte innerhalb k auch innerhalb kk liegen, so schließen wir hieraus folgende Tatsache:

Zu jedem Punkte K auf kk gibt es gewiß eine Drehung Δ um M, durch welche ein auf der Peripherie von k gelegener Punkt K' nach K



gelangt. Der Radius MK' des Zahlenkreises k liefert nach der Drehung Δ um M eine Jordansche Kurve, welche M mit dem Punkte K auf kk verbindet und die sonst ganz innerhalb kk verläuft.

Zugleich sehen wir, daß mindestens ein Punkt der Peripherie des Zahlenkreises k, nämlich gewiß der Punkt K', auf kk liegt.

Wir verbinden den außerhalb kk gelegenen Punkt A durch irgend eine Jordansche Kurve mit M und bezeichnen jetzt mit K denjenigen Punkt dieser Jordanschen Kurve, der auf kk liegt und von der Art ist, daß alle auf der Jordanschen Kurve zwischen K und A gelegenen Punkte außerhalb kk liegen. Sodann fassen wir das System aller aus K durch Drehungen um M hervorgehenden Punkte, d. h. den wahren Kreis $\varkappa$ um M durch K ins Auge. Die Punkte dieses wahren Kreises sind sämtlich Punkte auf kk.

Nach Axiom II enthält $\varkappa$ unendlich viele Punkte. Ist K^* eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, so gehört diese wegen Axiom III ebenfalls zum wahren Kreise $\varkappa$. Bezeichnet K_1 irgend einen Punkt des wahren Kreises $\varkappa$, so folgt, wenn wir diejenige Drehung um M ausführen, welche K^* in K_1 überführt, daß auch K_1 eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$ ist. Wir erhalten somit den Satz:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist eine abgeschlossene und in sich dichte d. h. eine perfekte Punktmenge.

§ 4.

Das wichtigste Ziel der nächstfolgenden Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, daß der wahre Kreis $\varkappa$ eine geschlossene Jordansche Kurve ist. Es wird sich ferner herausstellen, daß der wahre Kreis $\varkappa$ mit den Punkten auf kk übereinstimmt.

Zunächst beweisen wir, *daß irgend zwei Punkte K_1, K_2 des wahren Kreises $\varkappa$ sich stets untereinander sowohl durch eine Jordansche Kurve verbinden lassen, die abgesehen von den Endpunkten ganz innerhalb kk verläuft, als durch eine solche Jordansche Kurve, die abgesehen von den Endpunkten ganz außerhalb kk verläuft.*

In der Tat, ziehen wir entsprechend den obigen Ausführungen die Jordanschen Kurven MK_1 und MK_2, welche innerhalb kk den Mittelpunkt M mit K_1 bezüglich K_2 verbinden, und bestimmen auf der Kurve MK_1 von M ausgehend den letzten auf MK_2 gelegenen Punkt P, so bildet das Stück PK_1 der ersteren Jordanschen Kurve zusammen mit dem Stück PK_2 der letzteren Jordanschen Kurve eine Verbindungskurve von der zuerst verlangten Art.

Andererseits fassen wir die Drehungen um M ins Auge, bei denen K in K_1 bezüglich in K_2 übergeht; die Punkte A_1 bez. A_2, die dabei aus A entstehen, sind nach § 3 Punkte außerhalb kk und lassen sich daher außerhalb kk mit A verbinden. Aus diesen Verbindungskurven und denjenigen Jordanschen Kurven, die bei jenen Drehungen aus der in § 3 konstruierten

Jordanschen Kurve AK entstehen, können wir leicht eine Jordansche Kurve zwischen K_1 und K_2 zusammensetzen, die ganz außerhalb kk verläuft.

§ 5.

Der eben gefundene Satz setzt uns in den Stand, die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ in bestimmter Weise anzuordnen.

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 irgend vier verschiedene Punkte des wahren Kreises $\varkappa$. Wir verbinden die Punkte $K_1 K_2$ einerseits durch eine Jordansche Kurve, die ganz (d. h. zwischen K_1 und K_2) innerhalb kk verläuft, und andererseits durch eine solche, die ganz außerhalb kk verläuft. Da diese beiden Verbindungskurven einschließlich ihrer Endpunkte K_1, K_2 stetig sind, so bilden sie zusammen eine geschlossene Jordansche Kurve. Eine in dieser Weise aus K_1, K_2 hergestellte Kurve wollen wir stets mit $\overline{K_1 K_2}$ bezeichnen. Die ganze Zahlenebene zerfällt dann, abgesehen von $\overline{K_1 K_2}$ selbst, nach dem bekannten Jordanschen Satze in zwei Gebiete, nämlich das Innere und das Äußere dieser Kurve $\overline{K_1 K_2}$. Betreffs der Lage der Punkte K_3, K_4 sind nun zwei Fälle möglich: erstens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Kurve $\overline{K_1 K_2}$ nicht getrennt, d. h. sie liegen beide innerhalb oder beide außerhalb derselben; zweitens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Kurve $\overline{K_1 K_2}$ getrennt, d. h. es liegt K_3 innerhalb und K_4 außerhalb der Kurve $\overline{K_1 K_2}$ oder umgekehrt.

Verbinden wir die Punkte K_1, K_2 irgend wie anders durch einen innerhalb kk und einen außerhalb kk verlaufenden Weg, so erkennen wir leicht, daß hinsichtlich der Lage der Punkte K_3, K_4 zu der neu entstehenden geschlossenen Jordanschen Kurve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ gewiß derselbe Fall eintritt, wie vorhin. In der Tat, liegt beispielsweise der erste Fall vor, und befinden sich K_3, K_4 beide im Innern von $\overline{K_1 K_2}$, so verbinde man K_3 und K_4 durch einen innerhalb kk verlaufenden Weg W. Sollte derselbe aus dem Inneren der geschlossenen Kurve $\overline{K_1 K_2}$ heraustreten, so müßte er im weiteren Verlauf doch schließlich wieder in dieses Innere zurückführen; es ist daher gewiß möglich, den außerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verlaufenden Teil dieses Weges W durch einen nahe an dem betreffenden Stücke von $\overline{K_1 K_2}$ verlaufenden Weg zu ersetzen, welcher ganz innerhalb kk und zugleich innerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verläuft, so daß dadurch ein Verbindungsweg W^* zwischen K_3 und K_4 entsteht, welcher ebenfalls ganz innerhalb kk und innerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verläuft. Setzen wir aus dem innerhalb kk liegenden Teil der Kurve $\overline{K_1 K_2}$ und dem außerhalb kk liegenden Teil der Kurve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ eine neue geschlossene Jordansche Kurve $\overline{\overline{\overline{K_1 K_2}}}$ zusammen, so ist W^* offenbar ein Weg, welcher K_3 und K_4 innerhalb dieser neuen Kurve verbindet, ohne die Kurve $\overline{\overline{\overline{K_1 K_2}}}$ zu durchsetzen, d. h. K_3 und K_4 werden durch $\overline{\overline{\overline{K_1 K_2}}}$ gewiß nicht getrennt. Hieraus folgt nach entsprechender Konstruktion

außerhalb kk, daß K_3 und K_4 auch durch die Kurve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ nicht getrennt werden. Wir dürfen daher im ersten Falle schlechthin sagen: Das Punktepaar K_3, K_4 wird durch das Punktepaar K_1, K_2 nicht getrennt. Dann aber folgt auch im zweiten Falle, daß wir schlechthin sagen dürfen: Das Punktepaar K_3, K_4 wird durch das Punktepaar K_1, K_2 getrennt.

Wir führen nun irgend eine Drehung um M aus, durch welche die Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 in K_1', K_2', K_3', K_4' übergehen. Bedenken wir, daß die Drehung nach der Definition eine stetige und eindeutige umkehrbare Transformation der Zahlenebene ist und die Punkte innerhalb kk in Punkte innerhalb kk, die Punkte außerhalb kk in Punkte außerhalb kk überführt, so folgt, daß die Punktepaare K_1', K_2' und K_3', K_4' voneinander getrennt oder nicht getrennt liegen, je nachdem die Punktepaare K_1, K_2 und K_3, K_4 sich einander trennen oder nicht, d. h. *die gegenseitige Lage der Punktepaare K_1, K_2 und K_3, K_4 bleibt bei einer beliebigen Drehung um M unverändert.*

Wir leiten in ähnlicher Weise auch die Sätze ab, die den übrigen bekannten Tatsachen hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Punktepaare auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises entsprechen, nämlich die Sätze:

Wenn K_1, K_2 durch K_3, K_4 getrennt werden, so werden auch K_3, K_4 durch K_1, K_2 getrennt. Wenn K_1, K_4 durch K_2, K_5 und K_2, K_4 durch K_3, K_5 getrennt werden, so wird auch K_1, K_4 durch K_3, K_5 getrennt.

Dadurch sind wir zu dem folgenden Ergebnis gelangt:

Die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ sind cyklisch, d. h. mit Rücksicht auf die gegenseitige Trennung von Punktepaaren wie die Punkte eines gewöhnlichen Zahlenkreises angeordnet. Diese Anordnung ist gegenüber den Drehungen um den Mittelpunkt M des wahren Kreises $\varkappa$ invariant.

§ 6.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des wahren Kreises $\varkappa$ sprechen wir wie folgt aus:

Zu irgend einem Punktepaar des wahren Kreises $\varkappa$ gibt es stets ein Punktepaar dieses Kreises $\varkappa$, welches jenes Punktepaar trennt.

Wir bezeichnen mit K_∞ einen fest gewählten Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ und wollen dann von irgend drei anderen Punkten K_1, K_2, K_3 des wahren Kreises $\varkappa$ sagen, es liege K_2 zwischen K_1 und K_3 bez. nicht zwischen K_1 und K_3, je nachdem das Punktepaar K_1, K_3 durch das Punktepaar K_2, K_∞ getrennt oder nicht getrennt wird.

Wir nehmen im Gegensatz zu der obigen Behauptung an, es seien K und K' zwei Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, die durch kein Punktepaar getrennt werden; dann folgt nach unserer Festsetzung gewiß auch, daß zwischen denselben kein Punkt von $\varkappa$ liegt. Ferner dürfen wir annehmen,

es gäbe einen Punkt K_1 von der Art, daß das Punktepaar K_1, K' durch das Punktepaar K, K_∞ getrennt wird; anderenfalls nämlich denken wir uns in der folgenden Entwickelung die Rollen der Punkte K und K' miteinander vertauscht. Sodann wählen wir eine unendliche Reihe R von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, die gegen den Punkt K konvergieren, und verbinden K_1 mit K' sowohl durch eine innerhalb kk verlaufende Kurve, wie durch eine außerhalb kk verlaufende Kurve. Durch Zusammensetzung dieser beiden Kurven erhalten wir eine geschlossene Jordansche Kurve $\overline{K_1 K'}$, welche K_∞ von K trennt und daher notwendig auch von unendlich vielen Punkten der gegen K konvergenten Punktreihe R trennen muß. Es sei K_2 einer dieser Punkte der Reihe R. Da K_2 zwischen K_1 und K' liegt und nicht zwischen K und K' liegen darf, so liegt K_2 notwendig zwischen K_1 und K. Nunmehr verbinden wir analog K_2 mit K' durch eine geschlossene Jordansche Kurve $\overline{K_2 K'}$ und gelangen ebenso zu einem Punkte K_3 der Reihe R, der zwischen K_3 und K liegt u. s. f. Auf diese Weise erhalten wir *eine unendliche Reihe von Punkten* $K_1, K_2, K_3, \ldots$ *von denen jeder Punkt zwischen dem vorangehenden und* K *gelegen ist, und die gegen den Punkt* K *konvergieren.*

Wir führen jetzt eine Drehung um M aus, bei welcher K in einen der Punkte $K_1, K_2, K_3, \ldots$, etwa in K_i übergeht. Der Punkt K' gehe bei dieser Drehung in den Punkt K_i' über. Da unserer Annahme zufolge K und K' durch kein Punktepaar getrennt werden, so ist das gleiche mit dem Punktepaar K_i, K_i' der Fall. Infolgedessen muß K_i' entweder mit K_{i-1} oder mit K_{i+1} zusammenfallen oder zwischen K_{i-1} und K_{i+1} liegen; in jedem Falle liegt also K_i' zwischen K_{i-2} und K_{i+2}, so daß auch die unendliche Reihe von Punkten $K_1, K_3', K_5, K_7', K_9, K_{11}', \ldots$ gewiß von der Beschaffenheit ist, daß jeder Punkt dieser Reihe zwischen dem vorangehenden Punkte und dem Punkte K gelegen ist.

Wir wollen nun zeigen, daß auch die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \ldots$ gegen den Punkt K konvergieren müssen. In der Tat, würden die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \ldots$ einen von K verschiedenen Punkt Q zur Verdichtungsstelle haben, so wähle man aus ihnen einen Punkt K_l' aus. Da $K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}', \ldots$ sämtlich zwischen K_l' und K liegen, so gibt es eine geschlossene Jordansche Kurve $\overline{K_l' K}$, die den Punkt K_∞ von den Punkten $K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}', \ldots$ und daher auch von Q trennt, d. h. Q liegt notwendig zwischen K_l' und K. Wegen der Anordnung der Punkte K_i zu den Punkten K_l' folgt hieraus, daß Q auch zwischen den sämtlichen Punkten $K_1, K_5, K_9, \ldots$ einerseits und K andererseits liegt. Die geschlossene Jordansche Kurve $\overline{QK_\infty}$ müßte mithin sämtliche Punkte $K_1, K_5, K_9, \ldots$ von K trennen; dann könnten aber die Punkte $K_1, K_5, K_9, \ldots$ nicht gegen K konvergieren, wie es sein sollte.

Nunmehr betrachten wir die gegen K konvergierenden Punkte K_3, $K_7, K_{11}, \ldots$ und die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \ldots$, die nach dem eben Bewiesenen ebenfalls gegen K konvergieren. Da mittels einer Drehung um M der Punkt K in K_i und zugleich K' in K_i' übergeht, so müßte es nach Axiom III auch eine Drehung geben, welche K und zugleich K' in die gemeinsame Konvergenzstelle K überführt. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Definition der Drehung. Somit ist durch Widerlegung unserer Annahme der zu Anfang dieses § 6 aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

§ 7.

Mit Rücksicht auf die Festsetzungen zu Beginn des § 6 fassen wir den wahren Kreis $\varkappa$ unter Ausschluß des Punktes K_∞ als eine geordnete Punktmenge im Sinne *Cantors* auf: *dann besitzt diese Punktmenge den Ordnungstypus des Linearkontinuums.*

Zum Beweise hierfür bestimmen wir zunächst eine abzählbare Menge S von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, deren Verdichtungsstellen den wahren Kreis $\varkappa$ selbst ausmachen. Eine solche Menge S besitzt nach *Cantor*[1]) den Ordnungstypus des Systems aller rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung, d. h. es ist möglich, den Punkten des Systems S derart die rationalen Zahlen zuzuordnen, daß, wenn A, B, C irgend drei Punkte in S sind, von denen B zwischen A und C liegt, von den drei zugeordneten rationalen Zahlen a, b, c allemal die Zahl b ihrem Werte nach zwischen a und c liegt.

Es sei nun K irgend ein Punkt des wahren Kreises $\varkappa$, welcher nicht dem System S angehört; sind dann A, B Punkte von S, so nennen wir A, B auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von K gelegen, je nachdem K zwischen A und B oder nicht zwischen A und B liegt. Übertragen wir diese Festsetzung von den Punkten des Systems S auf die denselben zugeordneten rationalen Zahlen, so erhalten wir unter Vermittelung des Punktes K einen bestimmten Schnitt im Sinne *Dedekinds* durch das System der rationalen Zahlen: wir ordnen dem Punkte K die durch diesen Schnitt definierte irrationale Zahl zu.

Es kann nicht zwei verschiedene Punkte K und K' auf $\varkappa$ geben, denen die gleiche irrationale Zahl zugeordnet erscheint. In der Tat, konstruieren wir eine geschlossene Jordansche Kurve $\overline{KK'}$ und sei H irgend ein zwischen K und K' und folglich innerhalb $\overline{KK'}$ gelegener Punkt von $\varkappa$, so muß es, da H eine Verdichtungsstelle von Punkten des Systems S ist,

---

1) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Annalen Bd. 46, § 9; hinsichtlich der weiteren Schlußweise des Textes vergleiche man insbesondere § 11.

gewiß auch einen Punkt A in S geben, der innerhalb $\overline{KK'}$ und daher auch zwischen K und K' liegt. Die zu A gehörige rationale Zahl a bedingt daher jedenfalls eine Verschiedenheit der Schnitte, die unter Vermittelung der Punkte K und K' entstanden sind.

Wir wollen endlich zeigen, daß es auch umgekehrt zu jeder irrationalen Zahl α einen Punkt K auf $\varkappa$ gibt, dem diese zugeordnet erscheint. Zu dem Zwecke sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Reihe zunehmender und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine Reihe abnehmender Zahlen, deren jede gegen α konvergiert. Man konstruiere die diesen Zahlen zugehörigen Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bez. $B_1, B_2, B_3, \ldots$ und bezeichne mit K irgend eine Verdichtungsstelle dieser Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$. Der Punkt K gehört dann notwendig der Zahl α zu. Denn wenn wir allgemein eine geschlossene Jordansche Kurve $\overline{A_i B_i}$ konstruieren, so liegen die Punkte $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \ldots, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \ldots$ und folglich auch der Verdichtungspunkt K innerhalb $\overline{A_i B_i}$ d. h. zwischen den Punkten A_i, B_i. Der unter Vermittelung von K entstehende Schnitt ist mithin kein anderer als derjenige, der die Zahl α bestimmt.

Betrachten wir nun die Punkte auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius 1 und ordnen einem dieser Punkte das Zeichen $\pm\infty$ und den Punkt K_∞ zu, den übrigen Punkten dagegen in stetiger Folge die sämtlichen reellen Zahlen und diesen wiederum die entsprechenden Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, so gelangen wir zu folgendem Resultat: *Die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ lassen sich unter Erhaltung ihrer Anordnung umkehrbar eindeutig auf die Punkte der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius* 1 *abbilden.*

§ 8.

Um das in § 4 bezeichnete Ziel zu erreichen, bleibt nur noch die Stetigkeit der gewonnenen Abbildung, d. h. die Lückenlosigkeit des wahren Kreises $\varkappa$ zu zeigen übrig. Zu dem Zwecke denken wir uns die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ durch die Koordinaten x, y der Zahlenebene und andererseits die Punkte des Zahlenkreises mit dem Radius 1 durch den Bogen t von einem festen Anfangspunkte an bestimmt: dann haben wir zu beweisen, daß x, y stetige Funktionen von t sind.

Es seien nun $t_1, t_2, t_3, \ldots$ irgend eine Reihe gegen t^* konvergierender entweder sämtlich wachsender oder sämtlich abnehmender Werte und $K_1, K_2, K_3, \ldots$ seien bez. die diesen Parameterwerten zugeordneten Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, während der Wert t^* einem Punkte K^* auf $\varkappa$ entsprechen möge. Es sei ferner Q eine Verdichtungsstelle der Punkte $K_1, K_2, K_3, \ldots$. Konstruieren wir allgemein eine geschlossene Jordansche Kurve $\overline{K_i K^*}$, so liegen notwendig die Punkte $K_{i+1}, K_{i+2}, K_{i+3}, \ldots$ und

folglich auch deren Verdichtungsstelle Q innerhalb $\overline{K_i K^*}$ d. h. es liegt auch der Punkt Q zwischen K_i und K^*; demnach muß sich auch der zu Q gehörige Wert des Parameters t allgemein zwischen t_i und t^* befinden. Der letztere Widerspruch löst sich nur, wenn Q und K^* zusammenfällt; mithin konvergieren die Punkte $K_1, K_2, K_3, \ldots$ gegen den Punkt K^*. Damit ist die Stetigkeit der Funktion x, y vom Parameter t völlig bewiesen und es folgt eine Tatsache, die wir in § 4 als das erste wichtige Ziel unserer Entwickelung hingestellt haben, nämlich der folgende Satz:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist in der Zahlenebene eine geschlossene Jordansche Kurve.

§ 9.

Wir wissen, daß die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ sämtlich zu den Punkten auf kk gehören; es wird sich auch zeigen, daß letztere Punkte sämtlich auf $\varkappa$ liegen, so daß der weitergehende Satz gilt:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist identisch mit den Punkten auf kk; die innerhalb $\varkappa$ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte innerhalb kk und die außerhalb $\varkappa$ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte außerhalb kk.

Um diesen Satz zu erkennen, zeigen wir zunächst, daß der Punkt M, der „Mittelpunkt" des wahren Kreises $\varkappa$, mit jedem Punkte J innerhalb $\varkappa$ durch eine stetige Kurve verbunden werden kann, ohne daß dabei der wahre Kreis $\varkappa$ überschritten wird.

In der Tat, ziehen wir durch J irgend eine gewöhnliche Gerade in der Zahlenebene, eine sogenannte „Zahlengerade", so seien K_1 und K_2 die ersten Punkte dieser Zahlengeraden, die auf $\varkappa$ liegen, nach den beiden Richtungen hin von J aus gerechnet. Da K_1 und K_2 auch Punkte auf kk sind, so können sie mit M durch je eine Jordansche Kurve MK_1 bez. MK_2 verbunden werden, die ganz innerhalb kk verlaufen und daher gewiß nicht den wahren Kreis $\varkappa$ überschreiten. Trifft eine dieser Jordanschen Kurven das Geradenstück $K_1 K_2$ etwa im Punkte B, so bildet das Kurvenstück MB mit dem Geradenstück JB zusammen den gesuchten Verbindungsweg. Im entgegengesetzten Falle bilden MK_1 und MK_2 zusammen mit dem Geradenstück $K_1 K_2$ eine geschlossene Jordansche Kurve γ. Da diese Kurve γ ganz innerhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ (§ 1) liegt, so läßt sich der außerhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A gewiß nicht mit einem Punkte innerhalb γ verbinden, ohne daß dabei ein Punkt der Kurve γ überschritten wird. Die Kurve γ besteht nun aus Punkten innerhalb kk, aus Punkten auf kk und aus Punkten innerhalb $\varkappa$. Da die letzteren Punkte von A aus nur durch Überschreitung eines Punktes auf $\varkappa$, der ebenfalls ein Punkt auf kk ist, erreicht werden kann, so liegt das ganze innerhalb γ gelegene Gebiet notwendig auch innerhalb kk. Verbinden wir also M mit J durch einen stetigen innerhalb γ verlaufenden Weg, so überschreitet

dieser Weg den wahren Kreis $\varkappa$ sicher nicht und ist mithin von der gewünschten Art.

Wir schließen daraus zunächst, daß M innerhalb $\varkappa$ liegt, d. h. *der Mittelpunkt M des wahren Kreises $\varkappa$ liegt innerhalb desselben.*

Da ferner jeder Punkt auf kk mit M durch eine Jordansche Kurve verbunden werden kann, die, von den Endpunkten abgesehen, ganz innerhalb kk verläuft und also $\varkappa$ gewiß nicht trifft, so liegt jeder Punkt auf kk notwendig auf $\varkappa$ oder innerhalb $\varkappa$. Gäbe es einen Punkt P auf kk, der innerhalb $\varkappa$ liegt, so könnte der außerhalb $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A nicht mit Punkten in beliebiger Nähe von P verbunden werden, ohne daß dabei ein Punkt von $\varkappa$ überschritten wird; da aber jeder Punkt von $\varkappa$ zu den bedeckten gehört, so könnte P nicht ein Punkt auf kk sein; dies ist ein Widerspruch. Alle Punkte auf kk liegen also zugleich auf $\varkappa$, womit die obige Behauptung völlig erwiesen ist.

§ 10.

Das Punktgebilde kk ist in § 2 durch eine gewisse Konstruktion aus dem Zahlenkreise k hervorgegangen. Da der Zahlenkreis k, wie in § 3 gezeigt worden ist, mindestens einen Punkt auf kk enthält und im übrigen ganz auf oder innerhalb kk liegt und die Punkte auf kk nach § 9 nichts anderes als der wahre Kreis $\varkappa$ sind, so haben wir in der obigen Konstruktion zugleich ein Mittel, um aus dem Zahlenkreise k einen wahren Kreis $\varkappa$ zu konstruieren, welcher eine geschlossene Jordansche Kurve ist und den Zahlenkreis k umschließt, diesen von außen berührend; hier und im folgenden sagen wir von zwei Jordanschen Kurven, wenn die eine die andere im Inneren enthält und mit ihr wenigstens einen Punkt gemein hat, daß die erste die zweite von außen, diese aber jene von innen berührt.

Durch eine geringe Abänderung des früheren Verfahrens, nämlich durch eine Vertauschung der Rollen, die den Punkten innerhalb und außerhalb k zugeteilt worden sind, können wir aus dem Zahlenkreise k noch einen anderen wahren Kreis konstruieren: wir bezeichnen jetzt diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten außerhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt;* alle anderen Punkte dagegen als *unbedeckt.* Wenn nun ein unbedeckter Punkt sich durch eine Jordansche Kurve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit M verbinden läßt, so heiße dieser Punkt *innerhalb* kkk. Die Grenzpunkte dieser Punkte innerhalb kkk heißen Punkte *auf* kkk und alle übrigen Punkte heißen *außerhalb* kkk. Wir zeigen dann ähnlich wie in § 3—§ 9, *daß die Punkte auf kkk einen wahren Kreis um M bilden, der eine geschlossene Jordansche Kurve ist, den Mittelpunkt M umschließt und innerhalb des Zahlenkreises k verläuft, diesen von innen berührend.*

§ 11.

An Stelle des Zahlenkreises k kann man nun eine beliebige geschlossene innerhalb k verlaufende Jordansche Kurve z wählen, die den Punkt M im Innern enthält: *durch Anwendung der nämlichen Konstruktion erhalten wir dann zu dieser Kurve z sowohl einen bestimmten sie umschließenden wahren Kreis um M, der eine geschlossene Jordansche Kurve ist und z von außen berührt, als auch einen bestimmten innerhalb z verlaufenden wahren Kreis um M, der eine geschlossene Jordansche Kurve ist und z von innen berührt.*

Wir bemerken noch, daß jeder solche aus einer Jordanschen Kurve z konstruierte wahre Kreis auch aus einem Zahlenkreise erzeugt werden kann: man braucht nur denjenigen Zahlenkreis zu wählen, der innerhalb des vorgelegten wahren Kreises ihn von innen berührend verläuft bez. ihn von außen berührend umschließt; denn zwei wahre Kreise, die geschlossene Jordansche Kurven sind und denselben Zahlenkreis sei es beide umschließend, sei es beide ganz innerhalb verlaufend berühren, müßten gewiß einen Punkt gemein haben und wären folglich überhaupt miteinander identisch.

§ 12.

Nunmehr können wir ohne erhebliche Schwierigkeit die wichtige Tatsache beweisen, *daß jeder durch irgend einen Punkt P innerhalb $\varkappa$ gehende wahre Kreis um M ebenso wie die in* § 11 *konstruierten wahren Kreise eine geschlossene Jordansche Kurve ist, die M im Innern enthält.*

Zum Beweise fassen wir einerseits alle wahren Kreise um M ins Auge, die geschlossene Jordansche Kurven sind und P ausschließen: sie mögen wahre Kreise *erster* Art heißen; und andererseits alle diejenigen, die geschlossene Jordansche Kurven sind und P einschließen: sie mögen wahre Kreise *zweiter* Art heißen.

Wir denken uns zunächst aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M den *umschließenden* wahren Kreis erzeugt und fassen dann diejenigen Zahlenkreise ins Auge, aus denen wahre Kreise entspringen, die erster Art sind. Sodann suchen wir für diese Zahlenkreise den Grenzkreis g, d. h. den kleinsten Zahlenkreis, der sie sämtlich enthält. Alle Zahlenkreise, die kleiner als g sind, liefern dann wahre Kreise erster Art. Der aus dem Zahlenkreise g entspringende wahre Kreis γ müßte, wenn er nicht durch P geht, diesen Punkt ebenfalls ausschließen. Denn läge P innerhalb γ, so ziehe man eine ganz innerhalb γ verlaufende, die Punkte M und P umschließende geschlossene Jordansche Kurve und erzeuge aus dieser den wahren Kreis, der sie umschließt. Dieser wahre Kreis ließe sich, da er ja gewiß in das Innere des Zahlenkreises g hineintritt, durch einen Zahlenkreis erzeugen, der kleiner als g ist; er umschließt ferner den Punkt

P, was nicht möglich ist. Da, wie erwähnt, alle wahren Kreise um M, die geschlossene Jordansche Kurven sind, auch aus Zahlenkreisen um M entspringen, so ist offenbar der aus g entspringende wahre Kreis ein solcher Kreis erster Art, welcher alle anderen wahren Kreise erster Art umschließt.

Indem wir andererseits aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M denjenigen wahren Kreis erzeugt denken, der jenen Zahlenkreis ausschließt, beweisen wir auf ähnlichem Wege die Existenz eines wahren Kreises zweiter Art, welcher von allen anderen wahren Kreisen zweiter Art umschlossen wird.

Würden nun die gefundenen wahren Grenzkreise beide nicht durch P gehen, so könnte man eine Jordansche Kurve in dem zwischen ihnen gelegenen ringförmigen Gebiete ziehen, welche sicher durch unser Verfahren einen wahren Kreis liefern würde, der eine geschlossene Jordansche Kurve, aber weder von der ersten noch von der zweiten Art wäre; dies ist ein Widerspruch und damit haben wir die zu Anfang von § 12 aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 13.

Nachdem wir im vorstehenden die wichtigsten Eigenschaften der wahren Kreise um M gefunden haben, die durch Punkte innerhalb $\varkappa$ laufen, wenden wir uns nun zur *Untersuchung der Gruppe aller Bewegungen, die bei den Drehungen der Ebene um M der wahre Kreis $\varkappa$ in sich erfährt.*

Es seien den Entwickelungen in § 8 gemäß die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ auf die Punkte t der Peripherie eines Zahlenkreises mit dem Radius 1 unter Erhaltung ihrer Anordnung abgebildet: dann entspricht einer jeden Drehung Δ unserer Ebene um M eine bestimmte umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Punkte t des Einheitskreises in sich, da ja nach § 5 bei einer Drehung die Anordnung der Punkte auf dem wahren Kreise und daher mit Rücksicht auf § 7 auch die Anordnung der Parameterwerte t ungeändert bleibt. Diese Transformation läßt sich durch eine Formel von der Gestalt

$$t' = \Delta(t)$$

darstellen, wo $\Delta(t)$ eine stetige Funktion ist, die mit wachsendem t entweder stets wächst oder stets abnimmt und die bei Vermehrung des Arguments t um 2π sich ebenfalls um den Betrag 2π ändert.

Diejenigen Funktionen $\Delta(t)$, die bei wachsendem Argument t abnehmen, entsprechen Transformationen, die den Umlaufssinn auf dem wahren Kreise ändern, und da zufolge unserer Fassung des Begriffes der Bewegung bei einer Bewegung der Umlaufssinn stets derselbe bleiben soll,

so ergibt sich, daß die Funktion $\Delta(t)$ bei wachsendem Argument t stets wachsen muß.

§ 14.

Wir fragen zunächst, ob es in dieser Gruppe aller Drehungen um M eine Drehung geben kann, bei welcher ein Punkt A des wahren Kreises $\varkappa$ ungeändert bleibt. Es sei $t = a$ der Parameterwert für einen solchen Punkt A und dieser bleibe bei der eigentlichen Drehung Δ fest, die durch die Formel

$$t' = \Delta(t)$$

dargestellt wird. Ferner sei B irgend ein Punkt des wahren Kreises mit dem Parameterwert $t = b$, der bei der Drehung Δ seine Lage verändere; wir machen etwa die Annahme $b < a$, worin keine Einschränkung liegt.

Sowohl $\Delta(t)$ als auch die umgekehrte Funktion $\Delta^{-1}(t)$ sind von der Art, daß sie bei zunehmendem Argument zunehmen. Wegen $\Delta(a) = a$ schließen wir hieraus der Reihe nach, daß sämtliche Größen, die durch die symbolischen Potenzen

$$\Delta(b),\ \Delta\Delta(b) = \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \ldots,\ \Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \ldots$$

dargestellt werden, unterhalb a liegen. Nun bilden, falls $\Delta(b) > b$ ausfällt, die Größen

$$\Delta(b),\ \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \ldots$$

eine Reihe beständig zunehmender Werte; im Falle $\Delta(b) < b$ gilt das gleiche von der Größenreihe

$$\Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \ldots.$$

Aus diesen Tatsachen entnehmen wir, daß im ersteren Falle die direkten Wiederholungen der Drehung Δ auf b angewandt, im letzteren die symbolischen Potenzen von $\Delta(b)$ mit negativen Exponenten sich einem Grenzwert g nähern müssen, der zwischen a und b liegt oder mit a übereinstimmt. Entspricht der Grenzzahl g etwa der Punkt G auf dem wahren Kreise $\varkappa$, so bilden die Potenzen von Δ mit positiven bez. negativen Exponenten Bewegungen, so daß durch sie der Punkt B schließlich in beliebige Nähe von G übergeht und zugleich durch sie Punkte in beliebig kleiner Umgebung von G in beliebig kleiner Umgebung von G bleiben. Nach Axiom III müßte es demnach eine Bewegung geben, welche B in G überführt und zugleich G ungeändert läßt; dies widerspräche dem Begriffe der Bewegung. *Es ist demnach die Drehung Δ, welche den Punkt A festläßt, notwendig eine solche, die alle Punkte des Kreises $\varkappa$ festläßt, d. h. für diesen Kreis die Identität ist.*

§ 15.

Aus der Definition des wahren Kreises leuchtet unmittelbar die folgende Tatsache ein:

Es gibt stets eine Drehung um M, welche den beliebig gegebenen Punkt O des wahren Kreises $\varkappa$ in einen anderen beliebig gegebenen Punkt S desselben überführt.

§ 16.

Wir leiten jetzt eine weitere Eigenschaft für die Gruppe der Bewegungen eines wahren Kreises in sich ab.

Es seien O, S, T, Z vier solche Punkte auf dem wahren Kreise $\varkappa$, daß diejenige Drehung um M, vermöge welcher O in S übergeht, den Punkt T nach Z bewegt, so daß die Lage von Z eindeutig durch die Punkte O, S, T mitbestimmt ist. Halten wir O fest und bewegen S und T auf dem wahren Kreise, *so erfolgt bei stetiger Änderung von S und T auch die Änderung von Z stetig.*

Um dies zu beweisen, wählen wir eine unendliche Reihe von Punkten $S_1, S_2, S_3, \ldots$, die gegen den Punkt S konvergieren, und eine unendliche Reihe von Punkten $T_1, T_2, T_3, \ldots$, die gegen den Punkt T konvergieren. Die Drehungen um M, vermöge deren O in $S_1, S_2, S_3, \ldots$ übergeht, bezeichnen wir bez. mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ und die durch diese Drehungen bez. aus $T_1, T_2, T_3, \ldots$ entspringenden Punkte seien $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$; dann haben wir zu zeigen, daß die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ gegen Z konvergieren. Es sei Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$. Nach Axiom III gibt es dann eine Drehung um M, vermöge deren O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Hierdurch erweist sich aber Z^* als eindeutig bestimmt und mit Z identisch.

§ 17.

In § 14—§ 16 haben wir erkannt, daß die Gruppe aller Drehungen des wahren Kreises $\varkappa$ in sich die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es gibt außer der Identität keine Drehung um M, welche einen Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ festläßt.

2. Wenn O, S irgend zwei beliebige Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ sind, so gibt es gewiß eine Drehung um M, welche O in S überführt.

3. Bei einer Drehung um M, die O nach S bewegt, gehe zugleich T in Z über; der somit durch O, S, T eindeutig bestimmte Punkt Z erfährt auf $\varkappa$ eine stetige Änderung, wenn S und T auf $\varkappa$ stetig ihre Lage ändern.

Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen $\Delta(t)$, die den Bewegungen des wahren Kreises in sich entsprechen. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf:

Die Gruppe aller Bewegungen des wahren Kreises $\varkappa$ in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch-isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des Zahleneinheitskreises um M in sich.

§ 18.

Wenn wir uns diejenige Drehung um M, die den Punkt O des wahren Kreises $\varkappa$ mit dem Parameterwert 0 in den Punkt S mit dem Parameterwert s überführt, durch die Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

dargestellt denken, wobei wir den Funktionswert $\Delta(t, 0) = t$ nehmen, so erkennen wir auf Grund der gefundenen Eigenschaften der Drehungsgruppe, daß die Funktion $\Delta(t, s)$ eindeutig und stetig für alle Werte der beiden Veränderlichen t, s ist. Auch folgt, da s bis auf Vielfache von 2π eindeutig durch zwei zusammengehörige Werte t und t' bestimmt ist, daß die Funktion $\Delta(t, s)$ bei konstantem t mit wachsendem s nur entweder beständig wächst oder abnimmt, und da sie für $t = 0$ in s übergeht, so tritt notwendig der erstere Fall ein. Nun ist

$$\Delta(t, t) > \Delta(0, t), \quad \Delta(0, t) = t; \qquad (t > 0)$$

und wegen

$$\Delta(2\pi, s) = 2\pi + \Delta(0, s) = 2\pi + s$$

folgt

$$\Delta(2\pi, 2\pi) = 4\pi.$$

Mithin hat die Funktion $\Delta(t, t)$ $(> t)$ der einen Veränderlichen t die Eigenschaft, beständig von 0 bis 4π zu wachsen, während das Argument t von 0 bis 2π wächst. Aus diesem Umstande schließen wir sofort folgende Tatsache:

Wenn irgend eine positive Zahl $t' \leqq 2\pi$ vorgelegt ist, so gibt es stets eine und nur eine positive Zahl t, so daß

$$\Delta(t, t) = t'$$

wird; es ist $t < t'$. Der Parameterwert t liefert einen Punkt des wahren Kreises von der Art, daß bei einer gewissen Drehung um M der Punkt $t = 0$ sich nach t und zugleich der Punkt t nach t' bewegt.

Wir bezeichnen nun denjenigen Wert von t, für welchen

$$\Delta(t, t) = 2\pi$$

wird, mit $\varphi(\frac{1}{2})$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi(\tfrac{1}{2})$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right), \cdots$; ferner setzen wir allgemein

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right),$$

wo $2a$ eine gerade ganze Zahl bedeutet und n eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, und ferner setzen wir

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi.$$

Damit ist die Funktion φ für alle rationalen Argumente, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, widerspruchslos definiert.

Ist nun σ ein beliebiges positives Argument < 1, so entwickeln wir σ in einen Dualbruch von der Form

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots,$$

wo $z_1, z_2, z_3, \ldots$ lauter Ziffern 0, 1 bedeuten. Da die Zahlen der Reihe

$$\varphi\left(\frac{z_1}{2}\right), \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2}\right), \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3}\right), \cdots$$

gewiß niemals abnehmen und sämtlich $\leqq \varphi(1)$ bleiben, so nähern sie sich einem Grenzwert; diesen bezeichnen wir mit $\varphi(\sigma)$. Die Funktion $\varphi(\sigma)$ ist eine Funktion, die mit wachsendem Argument stets wächst; wir wollen beweisen, daß sie auch stetig ist. In der Tat, wäre sie an einer Stelle

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n}{2^n} = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n + 1}{2^n},$$

$$\left(\frac{a_n}{2^n} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \cdots + \frac{z_n}{2^n}\right)$$

nicht stetig, so müßten die beiden Grenzwerte

$$\underset{n=\infty}{L} \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right) \quad \text{und} \quad \underset{n=\infty}{L} \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$$

voneinander verschieden ausfallen und mithin die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1}{2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_2}{2^2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_3}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen, gegen einen anderen Punkt konvergieren als die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1 + 1}{2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_2 + 1}{2^2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_3 + 1}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen. Nun führt dieselbe Drehung, vermöge deren der Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$ übergeht, auch zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ über, und da die Zahlen $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right)$, $\cdots$ beständig abnehmen und die diesen Parameterwerten entsprechenden Punkte daher jedenfalls gegen eine gewisse Stelle A konvergieren müssen, so konvergieren mit Rücksicht auf Axiom III einer oft

angewandten Schlußweise zufolge auch die vorhin genannten unendlichen Reihen von Punkten beide gegen denselben Punkt.

Die Funktion $\varphi(\sigma)$ gestattet, da sie stets wächst und stetig ist, auch eine eindeutige und stetige Umkehrung.

Die Drehung um M, durch welche der Punkt $t = 0$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ übergeht, führt zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ in $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ über, unter b_m irgend eine ganze Zahl verstanden. Da für $n = \infty$ die Werte $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi(\sigma)$ und zugleich die Zahlen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ konvergieren, so gibt es nach Axiom III eine Drehung, welche den Punkt $t = 0$ nach $t = \varphi(\sigma)$ und zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ nach $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ bewegt, d. h. es ist

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right), \varphi(\sigma)\right) = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$$

und, da σ eine stetige Funktion ist, so folgt hieraus allgemein für beliebige Parameterwerte τ, σ

$$\Delta(\varphi(\tau), \varphi(\sigma)) = \varphi(\tau + \sigma).$$

Damit ist bewiesen, daß, wenn wir in der Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

mittels einer gewissen umkehrbar eindeutigen Funktion φ an Stelle von t, t', s neue Parameter τ, τ', σ gemäß

$$t = \varphi(\tau), \qquad t' = \varphi(\tau'), \qquad s = \varphi(\sigma)$$

einführen, sich die Drehung in den neuen Parametern durch die Formel

$$\tau' = \tau + \sigma$$

ausdrückt. Dieser Satz lehrt die Richtigkeit der in § 17 aufgestellten Behauptung.

Wir setzen noch an Stelle des Parameters σ den Parameter $\omega = 2\pi\sigma$, und nennen diesen Parameterwert ω *den Winkel* oder *die Bogenlänge* zwischen den Punkten O $(\sigma = 0)$ und S (d. h. σ) auf dem wahren Kreise $\varkappa$; die Drehung, bei welcher der Punkt O $(\sigma = 0)$ in den Punkt S (d. h. σ) übergeht, heiße *eine Drehung* $\Delta[\omega]$ *des wahren Kreises* $\varkappa$ *in sich um den Winkel* ω.

§ 19.

Durch diesen Beweis des Satzes in § 17 haben wir die Untersuchung der Drehungen des wahren Kreises $\varkappa$ in sich beendet. Wegen § 11 und § 12 erkennen wir, daß die in § 13—§ 18 für den wahren Kreis $\varkappa$ angewandten Schlußweisen und bewiesenen Tatsachen auch für alle wahren Kreise um M gültig sind, die innerhalb $\varkappa$ liegen.

Wir wenden uns nun zu der Gruppe der Transformationen *aller* Punkte bei den Drehungen der Ebene um den festen Punkt M und beweisen der Reihe nach folgende Sätze:

Es sei von einem wahren Kreise μ um M bekannt, daß er eine geschlossene Jordansche Kurve ist, in deren Innerem M liegt: dann gibt es außer der Identität keine Drehung der Ebene um M, welche jeden Punkt des wahren Kreises μ festläßt.

Zum Beweise bezeichnen wir eine Drehung um M, die jeden Punkt auf μ festläßt, mit M und nehmen dann *erstens* im Gegensatz zur Behauptung an, es gäbe auf μ einen Punkt A, in dessen beliebiger Nähe Punkte liegen, die ihre Lage bei einer Drehung M verändern. Um A schlagen wir, was nach § 12 gewiß möglich ist, einen wahren Kreis α, der durch einen gegenüber M veränderlichen Punkt gehe und hinreichend klein ist, so daß zufolge der obigen Bemerkung der Satz in § 14 für ihn zutrifft. Es sei B ein Schnittpunkt dieses Kreises mit μ; dann charakterisiert sich die Bewegung M zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei der B festbleibt. Bei einer solchen Drehung bleiben aber nach § 14 alle Punkte auf α fest, was nicht der Fall ist; unsere erstere Annahme erweist sich demnach als unzulässig.

Wir konstruieren nunmehr ein System von geschlossenen Jordanschen Kurven um M, zu denen μ gehört und von denen jede die andere entweder ganz ein- oder ganz umschließt, so daß durch jeden Punkt der Zahlenebene eine und nur eine Kurve des Systems hindurchgeht. Dann nehmen wir *zweitens* im Gegensatz zur obigen Behauptung an, es sei λ eine Kurve dieses Systems innerhalb μ bez. außerhalb μ, so daß alle Punkte in dem ringförmigen Gebiete zwischen μ und λ bei jeder Drehung M festbleiben, während in beliebiger Nähe der Kurve λ solche Punkte vorhanden sind, die nicht bei jeder Drehung M festbleiben.

Es sei A ein Punkt auf λ, in dessen beliebiger Nähe bei M bewegliche Punkte liegen; dann schlagen wir um A einen wahren Kreis, der durch einen dieser beweglichen Punkte läuft und hinreichend klein ist, so daß der Satz in § 14 für ihn zutrifft. Da dieser Kreis bei genügender Kleinheit jedenfalls durch einen Teil des ringförmigen bei den Bewegungen M festbleibenden Gebietes hindurchläuft, so charakterisiert sich die Be-

wegung M zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei welcher unendlich viele Punkte von α festbleiben. Bei M müßten daher nach § 14 alle Punkte von α festbleiben, was nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, daß bei den Drehungen M alle Punkte der Ebene festbleiben.

§ 20.

Wir stellen nun folgende wichtige Behauptung auf:

Jeder wahre Kreis ist eine geschlossene Jordansche Kurve: das System aller wahren Kreise um irgend einen Punkt M erfüllt lückenlos unsere Ebene, so daß jeder wahre Kreis um M jeden anderen solchen Kreis ein- oder umschließt. Die sämtlichen Drehungen $\Delta[\omega]$ unserer Ebene um M werden durch Transformationsformeln von der Gestalt

$$x' = f(x, y; \omega), \qquad y' = g(x, y; \omega)$$

ausgedrückt; darin bedeuten x, y bez. x', y' die Koordinaten in der Zahlenebene und f, g eindeutige stetige Funktionen in den drei Veränderlichen x, y, ω. Ferner haben für jeden Punkt x, y die Funktionen f, g hinsichtlich des Argumentes ω die Zahl 2π zur kleinsten simultanen Periode, d. h. man erhält jeden Punkt des wahren Kreises durch den Punkt (x, y) je einmal und nur einmal, wenn man ω die Werte von 0 bis 2π durchlaufen läßt. Endlich gilt für die Zusammensetzung zweier Drehungen um die Winkel ω, ω' die Formel

$$\Delta[\omega]\,\Delta[\omega'] = \Delta[\omega + \omega'].$$

§ 21.

Zum Beweise der aufgestellten Behauptungen fassen wir wiederum zunächst den in § 3—§ 18 untersuchten wahren Kreis $\varkappa$ um M ins Auge, der eine geschlossene Jordansche Kurve ist, und betrachten die Drehungen dieses wahren Kreises $\varkappa$ in sich. Nach § 18 führen wir den Winkel ω ein, so daß durch die Angabe eines Wertes von ω zwischen 0 und 2π eine Bewegung des wahren Kreises $\varkappa$ in sich eindeutig bestimmt ist. Nun entspricht aber einer jeden Drehung des wahren Kreises $\varkappa$ in sich nur e i n e bestimmte Drehung der Ebene um M, da ja nach § 19 bei Festhaltung aller Punkte auf $\varkappa$ überhaupt alle Punkte der Ebene festbleiben. Daraus folgt, daß in den in § 20 aufgestellten Formeln für die Drehung der Ebene um M die Funktionen f, g für alle x, y, ω *eindeutige* Funktionen sind, die hinsichtlich ω die Periode 2π besitzen.

Wir beweisen nun, daß f, g *stetige* Funktionen in x, y, ω sind. Zu dem Zwecke sei O irgend ein Punkt auf $\varkappa$, ferner $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Werten, die gegen einen bestimmten Wert ω konvergieren, und $T_1, T_2, T_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten unserer Ebene, die gegen irgend einen Punkt T konvergieren. Diejenigen

Punkte, die aus O bez. bei Anwendung der Drehungen um den Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ hervorgehen, bezeichnen wir mit $S_1, S_2, S_3, \ldots$ und die Punkte, die aus $T_1, T_2, T_3, \ldots$ bez. bei den Drehungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ entstehen, mögen $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ heißen. Endlich mögen die Punkte, die aus O bez. T durch eine Drehung um den Winkel ω hervorgehen, bez. mit S, Z bezeichnet werden. Es kommt darauf an, zu zeigen, daß die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ gegen Z konvergieren.

Da die Punkte $T_1, T_2, T_3, \ldots$ gegen T konvergieren, so können wir ein Jordansches Gebiet G bestimmen, in dessen Innerem die sämtlichen Punkte $M, T, T_1, T_2, T_3, \ldots$ liegen. Auf dieses Jordansche Gebiet wenden wir dann diejenige Drehung um M an, welche O nach S bewegt. Das so aus G entstehende Jordansche Gebiet heiße H; dasselbe enthält gewiß die Punkte M und Z. Endlich konstruieren wir eine geschlossene Jordansche Kurve α, die das Gebiet H ganz im Inneren enthält d. h. umschließt, ohne daß ein Punkt auf H liegt.

Wir wollen nun beweisen, daß von den Punkten $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ gewiß nur eine endliche Anzahl außerhalb der Kurve α liegen. In der Tat, würden unendlich viele von ihnen, etwa die Punkte $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}, \ldots$ außerhalb α liegen, so denke man sich allgemein M mit T_{i_h} durch eine Jordansche innerhalb G verlaufende Kurve γ_h verbunden und dann mit γ_h die Drehung um den Winkel ω_{i_h} ausgeführt. Die so entstehende Kurve verbindet M mit Z_{i_h} und schneidet folglich die Kurve α gewiß in einem Punkte, etwa B_h; es sei A_h der Punkt auf γ_h, der bei der Drehung um den Winkel ω_{i_h} in B_h übergeht. Da die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sämtlich innerhalb G und die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sämtlich auf α bleiben, so gibt es gewiß eine unendliche Reihe von Indices $h_1, h_2, h_3, \ldots$ von der Art, daß $A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3}, \ldots$ gegen einen Punkt A innerhalb G oder auf der Grenze von G und zugleich $B_{h_1}, B_{h_2}, B_{h_3}, \ldots$ gegen einen Punkt B auf α konvergieren. Nun wissen wir, daß die Punkte $S_1, S_2, S_3, \ldots$ gegen S konvergieren; mit Rücksicht auf Axiom III müßte es demnach eine Drehung um M geben, die O nach S und zugleich A nach B bewegt; dies ist aber nicht möglich. Denn bei dieser Drehung müßte A in einen Punkt innerhalb H oder auf der Grenze von H übergehen; dagegen ist B ein Punkt auf der Kurve α, die das Gebiet H ganz im Inneren enthält.

Damit haben wir erkannt, daß das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ ganz innerhalb eines gewissen Jordanschen Gebietes liegen muß.

Es sei nun Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ Da die Punkte $S_1, S_2, S_3, \ldots$ gegen S konvergieren, so gibt es nach Axiom III eine Drehung um M, bei welcher O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Da aber bei derjenigen Drehung um M, welche O in S über-

führt, T in Z übergehen sollte, so folgt wegen der vorhin bewiesenen Eindeutigkeit der Funktionen f, g notwendig $Z^* = Z$, d. h. die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ verdichten sich nur an einer Stelle, nämlich an der Stelle Z. Damit ist die Stetigkeit der Funktionen f, g in x, y, ω bewiesen.

Wir setzen jetzt in f, g für x, y die Koordinaten irgend eines Punktes P unserer Ebene ein, der innerhalb oder außerhalb des Kreises $\varkappa$ liegt. Die dann entstehenden Funktionen $f(\omega), g(\omega)$ in der Veränderlichen ω allein dürfen nicht beliebig kleine simultane Perioden haben. Denn da sie stetige Funktionen von ω sind, so wären sie in diesem Falle Konstante; dann aber würde der Punkt P bei allen Drehungen der Ebene um M festbleiben, was Axiom II widerspräche. Die kleinste simultane Periode jener beiden Funktionen $f(\omega), g(\omega)$ muß demnach von der Form $\frac{2\pi}{n}$ sein, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Hieraus folgt, daß der durch P gehende wahre Kreis erhalten wird, wenn man in den Formeln

$$x = f(\omega), \qquad y = g(\omega)$$

den Wert ω von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ laufen läßt. Diese Kurve ist geschlossen und ohne Doppelpunkte; sie stellt daher den durch P gehenden wahren Kreis um M dar. Wenden wir nunmehr auf die Ebene eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ an, so bleiben dabei alle Punkte dieses durch P gelegten wahren Kreises fest, und daher müßten nach § 19 alle Punkte der Ebene festbleiben; die Punkte auf dem wahren Kreise $\varkappa$ bleiben aber bei jener Drehung nur fest, wenn $n = 1$ ist, und damit haben wir die Aussagen des in § 20 aufgestellten Satzes in allen Teilen bewiesen.

§ 22.

Wir erkennen jetzt leicht auch die Richtigkeit der folgenden Tatsachen:

Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität.

Jeder Punkt der Ebene läßt sich durch eine Bewegung (d. h. zwei Drehungen) gewiß in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.

Die erstere Tatsache folgt sofort mit Rücksicht auf den Satz in § 20; die letztere, wenn wir um jeden der Punkte den wahren Kreis durch den anderen legen, wobei diese Kreise sich notwendig treffen müssen.

§ 23.

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie einzuführen und die für den Aufbau der Geometrie notwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln.

Zu dem Zwecke setzen wir zunächst folgende Benennungen fest: Wenn A, B und A', B' zwei Paare von Bildpunkten von der Art sind, daß sich vermöge einer Bewegung A in A' und zugleich B in B' überführen läßt, so sagen wir, *die (wahre) Strecke* AB *sei kongruent* (in Zeichen $\equiv$) *der (wahren) Strecke* $A'B'$. Ferner nennen wir *zwei wahre Kreise kongruent*, wenn es eine Bewegung gibt, welche ihre Mittelpunkte und zugleich sie selbst ineinander überführt.

Unter einer *Halbdrehung* H um einen Punkt M verstehen wir eine Drehung um den Winkel π, d. h. eine Drehung, die noch einmal ausgeführt die Identität ergibt. Wenn A, B, C drei Punkte sind, so daß A bei einer Halbdrehung um B in C und demnach auch zugleich C bei dieser Halbdrehung in A übergeht, so heiße B die *Mitte der Strecke* AC.

Wenn C ein Punkt innerhalb bez. außerhalb des um A durch B geschlagenen wahren Kreises ist, so nennen wir die Strecke AC *kleiner bez. größer* als die Strecke AB. Um in analoger Weise die Begriffe „kleiner" und „größer" für beliebige Strecken bez. für beliebige Kreise zu definieren, führe man Bewegungen aus, vermöge welcher die Anfangspunkte der Strecken bez. die Mittelpunkte der Kreise in den nämlichen Punkt fallen.

§ 24.

Eine wahre Strecke AC hat höchstens *eine* Mitte; gäbe es nämlich für AC zwei Mitten und bezeichnen wir die Halbdrehungen um diese Mitten mit H_1 und H_2, so würde die zusammengesetzte Substitution $H_1 H_2^{-1}$ eine Bewegung darstellen, welche jeden der Punkte A und C festließe, und somit entnehmen wir nach § 22, indem wir symbolisch die Identität mit 1 bezeichnen,

$$H_1 H_2^{-1} = 1 \quad \text{d. h.} \quad H_1 = H_2;$$

mithin stimmen auch die Mitten selbst überein. Insbesondere folgern wir hieraus die weitere Tatsache:

Wenn zwei Strecken einander kongruent sind, so sind auch ihre Hälften einander kongruent.

§ 25.

Für die weiteren Entwicklungen brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Es mögen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegen den Punkt A und die Punkte $M_1, M_2, M_3, \ldots$ gegen den Punkt M konvergieren; wenn dann allgemein bei Ausführung der Halbdrehung um M_i der Punkt A_i in B_i übergeht, so konvergieren die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ebenfalls und zwar gegen denjenigen Punkt B, der durch die Halbdrehung um M aus A entsteht.

Zunächst läßt sich gewiß ein Jordansches Gebiet finden, innerhalb dessen das Punktsystem $B_1, B_2, B_3, \ldots$ gelegen ist. Davon überzeugen wir uns durch das nämliche Schlußverfahren, welches in § 21 auf das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ angewandt worden ist.

Wir bezeichnen nun mit B^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots$ Auf Grund des Axioms III muß es dann eine Bewegung geben, welche die Punkte A, M, B^* bez. in die Punkte B^*, M, A überführt; d. h. B^* geht aus A durch die Halbdrehung um M hervor. Da aber auch B aus A durch die Halbdrehung um M hervorgeht, so folgt $B^* = B$ und damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

§ 26.

Es sei M die Mitte einer gewissen Strecke AB; dann wollen wir zeigen, daß jede Strecke AC, die kleiner als AB ist, ebenfalls eine Mitte N besitzt.

Zu dem Zwecke ziehen wir irgend eine stetige Kurve γ von A bis M und suchen zu jedem Punkte M' dieser Kurve γ den Punkt B', so daß M' die Mitte von AB' wird; dann ist der Ort der Punkte B', wie wir aus dem in § 25 bewiesenen Hilfssatze schließen, eine stetige Kurve γ'. Diese Kurve γ' mündet gewiß in A, wenn der Punkt M' auf der Kurve γ nach A hin läuft. Denn im anderen Falle nehmen wir an, es sei $M_1, M_2, M_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten auf γ, die gegen A konvergieren, und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die entsprechenden Punkte auf der Kurve γ'. Würden nun $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine von A verschiedene Verdichtungsstelle A^* besitzen, so entnehmen wir daraus, daß es eine Bewegung gibt, welche gewisse Punkte in beliebiger Nähe von A in beliebiger Nähe von A^* läßt und zugleich den Punkt A in beliebige Nähe von A^* bringt. Dann müßte also auf Grund des Axioms III bei einer gewissen Bewegung A festbleiben und zugleich in A^* übergehen, was unmöglich ist.

Da nun unserer Annahme zufolge AC kleiner als AB ist, so muß der um A durch C geschlagene wahre Kreis die A mit B verbindende stetige Kurve γ' in irgend einem Punkte B' treffen. Der diesem Punkte entsprechende Punkt M' auf γ ist die Mitte der wahren Strecke AB' und da $AC \equiv AB'$ ist, so findet man durch eine geeignete Drehung um A aus M' auch die gesuchte Mitte N von AC.

Da die Strecke AC durch ihre Halbdrehung um ihre Mitte N in die Strecke CA übergeht, so folgt aus unserem eben bewiesenen Satze:

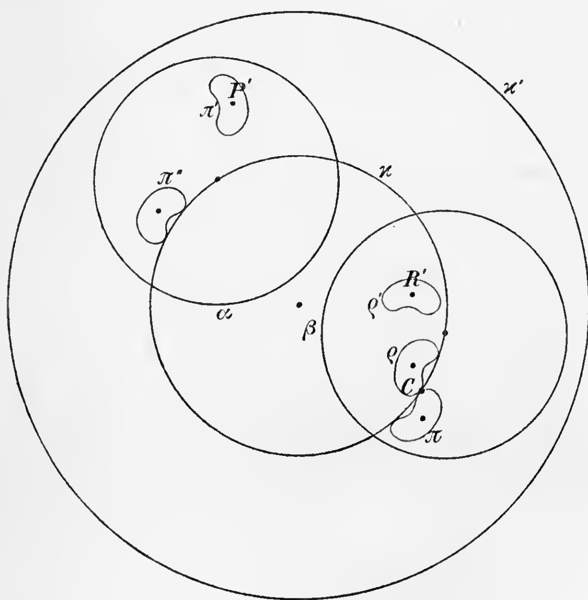
Die Strecke AC ist stets der Strecke CA kongruent — vorausgesetzt, daß die Strecke AC kleiner als die bestimmte am Anfange dieses § 26 zu Grunde gelegte Strecke AB ist.

Zugleich erkennen wir, daß, wenn die Punkte $C_1, C_2, C_3, \ldots$ gegen den Punkt A konvergieren, stets auch die Mitten $N_1, N_2, N_3, \ldots$ der Strecken bez. $AC_1, AC_2, AC_3, \ldots$ gegen A konvergieren.

§ 27.

Für unsere weiteren Entwicklungen haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nötig und zwar kommt es vor allem darauf an, *zwei zueinander kongruente Kreise zu konstruieren, die sich einander von außen in einem und nur in einem Punkte berühren.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen Kreis $\varkappa'$ so klein, daß innerhalb desselben keine Strecke liegt, die der bestimmten in § 26 zu Grunde gelegten Strecke AB kongruent wird; der Satz in § 20 zeigt, daß dies gewiß möglich ist, da sich sonst die Punkte A und B gleichzeitig beliebig nahe an M bewegen ließen. Sodann sei $\varkappa$ ein innerhalb $\varkappa'$ liegender Kreis um denselben Mittelpunkt wie $\varkappa'$. Wir nehmen nun auf dem Kreise $\varkappa$ irgend zwei Punkte an und schlagen um diese zueinander kongruente Kreise α und β so klein, daß irgend zwei Punkte auf $\varkappa$, die innerhalb α liegen, niemals von irgend zwei Punkten auf $\varkappa$, die innerhalb β liegen, im Sinne der Anordnung der Punkte auf $\varkappa$ getrennt liegen können. Außerdem seien die Kreise α, β so klein gewählt, daß sie ganz innerhalb des Kreises $\varkappa'$ liegen. Dann nehme man einen Punkt P' an, der innerhalb α und außerhalb $\varkappa$ liegt, und einen Punkt R' an, der innerhalb β und innerhalb $\varkappa$ liegt, und schlage dann um P' und R' zueinander kongruente Kreise π' und ϱ' so klein, daß π' ganz innerhalb α und außerhalb $\varkappa$ und ferner ϱ' ganz innerhalb β und innerhalb $\varkappa$ fällt. Nun führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von α aus, so daß der Kreis π' in einen Kreis π'' übergeht, der den Kreis $\varkappa$ von außen berührt: die Berührungs-



punkte bilden ein Punktsystem, welches mit S bezeichnet werden möge. Sodann führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von β aus, so daß der Kreis ϱ' in einen Kreis ϱ übergeht, der den Kreis $\varkappa$ von innen berührt. Die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit T bezeichnet werden möge.

Da wegen der Wahl der Kreise α, β keine zwei Punkte des Systems S durch ein Punktepaar des Systems T auf $\varkappa$ getrennt werden, so ist es gewiß möglich, durch eine Drehung der Ebene um den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ einen der äußersten Punkte von S auf $\varkappa$ mit einem der äußersten Punkte von T auf $\varkappa$ derartig zur Deckung zu bringen, daß die übrigen Punkte von S in Punkte übergehen, die von den Punkten des Systems T durchweg verschieden sind. Bei dieser Drehung gelangt der Kreis π'' mit dem Kreise ϱ in Berührung in der Weise, daß der Punkt C, in dem das Zusammenfallen stattfindet, der einzige Berührungspunkt wird. Wir bezeichnen den Kreis π'' in seiner neuen Lage mit π und die Mittelpunkte von π und ϱ bez. mit P und R.

Wir wollen nun beweisen, daß der Berührungspunkt C notwendig die Mitte zwischen den beiden Mittelpunkten P, R ist. In der Tat, wegen unserer Wahl von $\varkappa'$ ist die Strecke PR notwendig kleiner als die bestimmte Strecke AB und besitzt daher nach § 26 gewiß eine Mitte; dieselbe heiße C^*. Dann geht jeder der beiden Kreise π, ϱ durch eine Halbdrehung um C^* in den anderen über und daher wird aus jedem Punkte des einen Kreises ein Punkt des andern. Da der Punkt C beiden Kreisen π, ϱ gemeinsam ist, so muß er bei einer solchen Halbdrehung ebenfalls in einen den Kreisen π, ϱ gemeinsamen Punkt übergehen, er muß folglich bei dieser Halbdrehung ungeändert bleiben und stimmt mithin notwendig mit dem Punkte C^* überein, um welchen die Halbdrehung ausgeführt wurde.

Aus dem eben bewiesenen Satze erkennen wir zugleich folgende Tatsache:

Aus dem Kreise π entsteht durch Halbdrehung um den Punkt C auf π der Kreis ϱ, der π in C von außen berührt; es gibt außer ϱ keinen anderen Kreis, der mit dem Kreise π kongruent ist und ihn im Punkte C und nur in diesem einen Punkte von außen berührt.

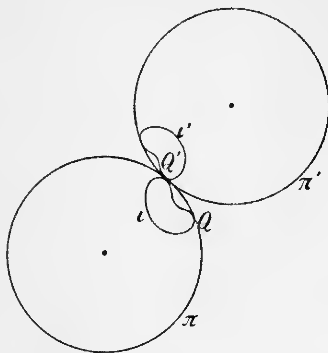
§ 28.

Ferner gilt der Satz:

Wenn irgend ein Kreis ι von dem Kreise π umschlossen und berührt wird, so findet diese Berührung nur in einem Punkte statt.

Zum Beweise nehmen wir an, es seien Q, Q' zwei voneinander verschiedene Berührungspuukte der Kreise ι und π. Dann führen wir eine

Halbdrehung um Q' aus; durch diese geht π in einen Kreis π' über, der π nur im Punkte Q' berührt, und ι geht in einen Kreis ι' über, der innerhalb π' und daher gewiß ganz außerhalb π verläuft, beide Kreise π, π' nur in Q' berührend. Führen wir jetzt diejenige Drehung um den Mittelpunkt des Kreises π aus, durch welche Q in Q' übergeht, so entsteht aus ι ein Kreis ι'', welcher ganz innerhalb π und daher gewiß auch außerhalb ι' liegt, diesen nur in Q' berührend Damit haben wir zwei Kreise ι, ι'', die beide den kongruenten Kreis ι' in Q' und nur in diesem Punkte von außen berühren, und dieser Umstand widerspricht dem Satze in § 27.



Die in § 27 und § 28 gefundenen Tatsachen bleiben gültig, wenn wir statt π, ϱ kleinere Kreise nehmen.

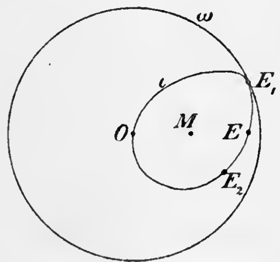
§ 29.

Es sei P der Mittelpunkt des in § 27 konstruierten Kreises π und Q ein Punkt auf π, ferner sei O ein beliebiger Punkt. Dann können wir unter Heranziehung der Bemerkung am Schluß von § 26 und wie in § 27 auf Grund des Satzes in § 20 gewiß einen Punkt E in solcher Nähe von O angeben, daß innerhalb des Kreises ι, der um die Mitte M der Strecke OE durch O und E gelegt wird, keine zu PQ kongruente Strecke existiert und das gleiche auch für jeden Punkt E' und den entsprechenden Kreis ι' gilt, wenn E' noch näher als E an dem Punkte O gelegen ist.

Alsdann gilt der Satz:

Der um die Mitte M (bez. M') von OE (bez. OE') durch O gelegte Kreis ι (bez. ι') wird von dem Kreise um O durch E (bez. E') ganz umschlossen und nur in E (bez. E') berührt.

Zum Beweise konstruieren wir zunächst denjenigen Kreis ω um O, der den Kreis ι umschließt und zugleich berührt. Dieser Kreis ω ist notwendig kleiner als der Kreis π; denn im anderen Falle würde der um O gelegte zu π kongruente Kreis ins Innere des Kreises ι eintreten und dann müßte innerhalb ι eine zu PQ kongruente Strecke existieren, was nicht der Fall sein sollte. Nach dem in § 28 bewiesenen Satze kann dieser Kreis ω mit ι nur einen Berührungspunkt haben; derselbe sei E_1. Wäre nun E_1 verschieden von E, so führe man um M diejenige



Drehung aus, durch welche E_1 nach O gelangt; bei dieser Drehung gelangt dann O in einen Punkt E_2 des Kreises ι, der von E_1 verschieden sein müßte. Da die Strecke OE_1 der Strecke E_2O und also auch OE_2 kongruent wird, so müßte E_2 ebenfalls ein Punkt des Kreises ω sein, dies widerspräche dem Umstande, daß E_1 der einzige den Kreisen ω und ι gemeinsame Punkt sein sollte; d. h. der Kreis ω läuft durch E und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 30.

Bei den folgenden Entwicklungen legen wir die zu Beginn des § 29 konstruierte Strecke OE zu Grunde und erteilen den Punkten O, E die Zahlenwerte 0 bez. 1; sodann konstruieren wir die Mitte von OE und erteilen dieser Mitte den Zahlenwert $\frac{1}{2}$, ferner erteilen wir den Mitten der Strecken $(0, \frac{1}{2})$ bez. $(\frac{1}{2}, 1)$ die Werte $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{3}{4}$ und dann den Mitten der Strecke $(0, \frac{1}{4})$ bez. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 1)$ die Werte $\frac{1}{8}$ bez. $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$; und so fort. Ferner führen wir mit der ganzen Strecke $(0, 1)$ um den Punkt 0 eine Halbdrehung aus und erteilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwert $-a$; sodann führen wir um den Punkt 1 eine Halbdrehung aus und erteilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwert $2-a$ und so fort denken wir uns abwechselnd Halbdrehungen um O und um E ausgeführt und die neu entstehenden Punkte entsprechend benannt, bis schließlich jede Zahl a einem bestimmten Punkte zugeordnet erscheint, wenn a eine rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist.

§ 31.

Wir erkennen durch diese Zuordnung leicht folgendes Gesetz:

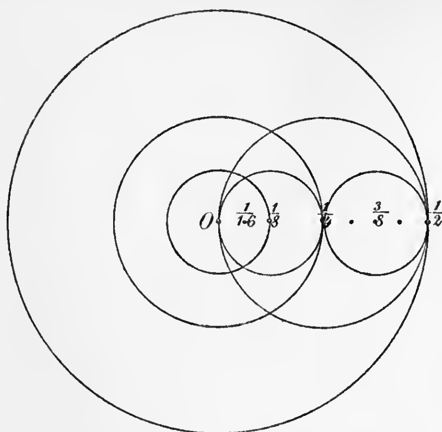
Durch eine Halbdrehung um den zur Zahl a gehörigen Punkt geht jeder Punkt x in den Punkt $2a-x$ über. Wenn wir mithin erst eine Halbdrehung um den Punkt $O=0$ und dann eine solche um den Punkt a ausführen, so wird jeder Punkt x in den Punkt $x+2a$ verwandelt.

§ 32.

Um die Punkte, denen Zahlen zugehören, untereinander anzuordnen und die von ihnen begrenzten Strecken miteinander zu vergleichen, benutzen wir den in § 29 aufgestellten Satz über sich berührende Kreise in folgender Weise:

Der Kreis um den Punkt 0 durch den Punkt $\frac{1}{2}$ umschließt ganz den Kreis um $\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, und da dieser die Kreise um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ und

um $\frac{3}{8}$ durch $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ umschließt, die letzteren wiederum die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, um $\frac{5}{16}$ durch $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, um $\frac{7}{16}$ durch $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, u. s. f., so erkennen wir, daß die Strecke $(0, \frac{1}{2})$ größer als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Wert unterhalb $\frac{1}{2}$ liegt.



Ferner umschließt der Kreis um 0 durch $\frac{1}{4}$ den Kreis um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Der zweite umschlossene Kreis umschließt seinerseits die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16}$ und um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16}$, diese umschließen wiederum die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}$, $\frac{3}{32}$ bez. $\frac{5}{32}$, $\frac{7}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, daß die Strecke $(0, \frac{1}{4})$ größer ist als alle Strecken $(0, a)$, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Wert unterhalb $\frac{1}{4}$ liegt.

Weiter betrachten wir den Kreis um 0 durch $\frac{1}{8}$; derselbe umschließt den Kreis um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ und dieser wiederum umschließt die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}$ durch $\frac{2}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, daß die Strecke $(0, \frac{1}{8})$ größer als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Wert unterhalb $\frac{1}{8}$ liegt. Durch Fortsetzung dieses Schlußverfahrens finden wir das allgemeine Resultat:

Ist a eine positive rationale Zahl, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Wert unterhalb $\frac{1}{2^m}$ liegt, so ist die Strecke $(0, a)$ stets kleiner als die Strecke $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$.

§ 33.

Nunmehr sind wir im stande, der Reihe nach folgende Hilfssätze zu beweisen:

Die Punkte, die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ entsprechen, konvergieren gegen den Punkt 0.

Denn im entgegengesetzten Falle müßten, da die Strecken $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{4})$, $(0, \frac{1}{8})$, $(0, \frac{1}{16})$, ... beständig kleiner werden, die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ ihre Verdichtungsstellen auf einem bestimmten wahren Kreise $\varkappa$ um den

Punkt 0 haben. Es sei etwa $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ eine Reihe von Punkten, die gegen einen Punkt K auf $\varkappa$ konvergieren: dann mögen die Punkte

$$\frac{1}{2^{n_1+1}}, \quad \frac{1}{2^{n_2+1}}, \quad \frac{1}{2^{n_3+1}}, \cdots$$

im Punkte K^* eine Verdichtungsstelle haben. Aus dem Satze im § 25 geht hervor, daß dann K^* die Mitte der Strecke OK sein müßte; dies widerspricht unter Hinzuziehung der am Schlusse von § 27 gefundenen Tatsache dem Umstande, daß K^* ebenfalls auf dem Kreise $\varkappa$ liegt.

§ 34.

Es mögen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ positive rationale Zahlen bedeuten, deren Nenner Potenzen von 2 sind. Wenn dann die unendliche Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch die diesen Zahlen entsprechende Punktreihe gegen den Punkt 0.

Zum Beweise wählen wir die ganzen Exponenten $n_1, n_2, n_3, \ldots$ derart, daß

$$a_1 < \frac{1}{2^{n_1}}, \quad a_2 < \frac{1}{2^{n_2}}, \quad a_3 < \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$$

wird, und die Reihe $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ ebenfalls gegen 0 konvergiert. Da zufolge des Satzes in § 32 allgemein der Punkt a_i innerhalb des Kreises um 0 durch $\frac{1}{2^{n_i}}$ liegt und nach dem in § 33 bewiesenen Hilfssatze die Kreise um 0 durch $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ gegen 0 konvergieren, so folgt sofort auch die zu beweisende Behauptung.

§ 35.

Endlich gilt der folgende Satz:

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen, deren Nenner Potenzen von 2 sind und die gegen irgend eine reelle Zahl a konvergieren: dann konvergieren die entsprechenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ebenfalls gegen einen bestimmten Punkt.

Zum Beweise nehmen wir das Gegenteil an: es seien etwa V' und V'' zwei voneinander verschiedene Verdichtungsstellen der Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und zwar mögen die Punkte $a_{1'}, a_{2'}, a_{3'}, \ldots$ gegen V' und $a_{1''}, a_{2''}, a_{3''}, \ldots$ gegen V'' konvergieren. Nach den Bemerkungen in § 31 gibt es für jeden Punkt a_k eine aus zwei Halbdrehungen zusammengesetzte Bewegung, die allgemein den Punkt $a_{i'}$ in den Punkt $a_{i'} - a_k$ und zugleich den Punkt $a_{i''}$ in den Punkt $a_{i''} - a_k$ überführt, und da sowohl die Zahlen-

werte $a_{i'} - a_k$ als auch die Zahlenwerte $a_{i''} - a_k$ mit wachsenden Indices beliebig nahe an 0 kommen, so erkennen wir mit Rücksicht auf den Satz in § 34, daß es Bewegungen gibt, die einen Punkt in beliebiger Nähe von V' und zugleich einen Punkt in beliebiger Nähe von V'' in beliebige Nähe des Punktes 0 bringen. Dies ist im Hinblick auf Axiom III einer oft angewandten Schlußweise zufolge nicht möglich.

§ 36.

Erteilen wir nun dem Punkte, gegen den die Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konvergieren, den Zahlenwert a, so ist damit überhaupt jedem reellen Zahlenwerte ein bestimmter Punkt unserer Ebene zugeordnet; wir nennen das System aller dieser Punkte eine *wahre Gerade*, so daß also *unter dieser wahren Geraden dasjenige System von Punkten verstanden wird, die aus den Punkten 0, E entstehen, wenn man fortgesetzt die Mitten nimmt, Halbdrehungen ausführt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt. Sämtliche durch Bewegung aus dieser wahren Geraden entstehenden Punktsysteme heißen wiederum wahre Gerade. Die wahre Gerade zerfällt von jedem ihrer Punkte aus in zwei Halbgerade.*

§ 37.

Mit Benutzung des Hilfssatzes in § 25 erkennen wir leicht, daß bei der Halbdrehung um einen beliebigen Punkt a unserer wahren Geraden allgemein der Punkt x in den Punkt $2a - x$ übergeht; bei der Ausführung zweier Halbdrehungen um die Punkte 0 und a geht also allgemein x in $x + 2a$ über.

Aus dem Satze in § 35 folgern wir leicht, daß auch dann, wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beliebige gegen a konvergente Zahlen sind, die entsprechenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ stets gegen den entsprechenden Punkt a konvergieren; d. h. *die wahre Gerade ist eine stetige Kurve.*

§ 38.

Versuchen wir die Annahme, daß es zwei Zahlenwerte a und b gäbe, die auf der wahren Geraden den nämlichen Punkt P der Ebene darstellen. Der Punkt $\frac{a+b}{2}$ ist die Mitte der Strecke (a, b); derselbe müßte daher mit dem Punkte P übereinstimmen. Das gleiche müßte dann von den Mitten den Strecken $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ und $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ d. h. den Punkten $\frac{3a+b}{4}$ und $\frac{a+3b}{4}$ gelten. Indem wir fortgesetzt die Mitten nehmen, erkennen wir, daß sämtliche Punkte $\frac{A_n a + B_n b}{2^n}$, wo A_n, B_n positive ganze Zahlen

mit der Summe 2^n bedeuten, mit P identisch sein müßten, und hieraus folgt nach § 37, daß überhaupt allen zwischen a und b gelegenen reellen Zahlen der nämliche Punkt P der Geraden entsprechen müßte. Dieser Widerspruch zeigt, daß *die wahre Gerade keinen Doppelpunkt besitzt.* Ebenso erkennen wir, daß *die wahre Gerade nicht in sich selbst zurücklaufen kann.*

§ 39.

Zwei Gerade haben höchstens einen Punkt gemein.

In der Tat, hätten sie die zwei Punkte A und B gemein und entsprächen diesen Punkten auf der einen Geraden die Zahlenwerte a, b und auf der andern Geraden die Zahlenwerte a', b', so müßten nach § 24 auch die Mitten $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a'+b'}{2}$ miteinander übereinstimmen. Indem wir fortgesetzt wie in § 38 die Mitten nehmen, schließen wir in ähnlicher Weise, daß sämtliche zwischen a und b bez. a' und b' gelegenen Punkte auf beiden Geraden und mithin diese Geraden selbst miteinander identisch sind.

§ 40.

Unsere wahre Gerade schneidet jeden um einen ihrer Punkte, etwa um den Punkt 0 gelegten Kreis.

In der Tat, bei der entgegengesetzten Annahme sind nur zwei Fälle möglich: entweder es gibt einen bestimmten Kreis $\varkappa$ um den Punkt 0, der von der wahren Geraden g noch getroffen wird, während die den Kreis $\varkappa$ umschließenden Kreise um 0 von g nicht mehr getroffen werden; oder es gibt einen bestimmten Kreis $\varkappa$, der von g nicht getroffen wird, während alle innerhalb $\varkappa$ verlaufenden Kreise um den Punkt 0 von g getroffen werden.

Da die Gerade g ihrer Konstruktion gemäß über jeden ihrer Punkte hinaus stets fortgesetzt werden kann und, wie in § 38 gezeigt worden ist, keinen Doppelpunkt besitzen darf, so müßte es im *ersteren* Falle gewiß einen innerhalb $\varkappa$ verlaufenden Kreis um den Punkt 0 geben, den sie auf derselben Seite von 0 an zwei Stellen A, B träfe, wobei B auf der Fortsetzung von g hinter A und genügend nahe an A innerhalb $\varkappa$ zu nehmen ist. Führt man nun eine Drehung um den Punkt 0 aus, durch welche A in B übergeht, so würde dabei unsere Gerade g in eine andere übergehen, welche g außer in 0 noch in B schnitte; dies ist dem in § 39 bewiesenen Satze zufolge unmöglich.

Im *zweiten* Falle bezeichne K einen Punkt des Kreises $\varkappa$, in dessen beliebige Nähe die wahre Gerade g gelangt. Man schlage dann um K einen wahren Kreis π^*, der kleiner als $\varkappa$ ist und g etwa im Punkte M treffe. Sodann schlage man um M einen Kreis π, der größer als π^* und

kleiner als $\varkappa$ ist. Dieser Kreis π enthält, da er größer als π^* ist, den Punkt K im Inneren, und da er kleiner als $\varkappa$ ist, so ergibt unsere Annahme in Verbindung mit dem vorhin Bewiesenen, daß die durch M gehende Gerade g stetig innerhalb π verläuft, nach der einen oder anderen Richtung hin verlängert je durch einen Punkt auf π aus dem Kreise π heraustritt und dann nicht mehr in den Kreis π zurückläuft. Da die Gerade g andererseits dem innerhalb π gelegenen Punkte K beliebig nahe kommen soll, so enthält sie notwendig den Punkt K selbst; hierin liegt ein Widerspruch mit unserer gegenwärtigen Annahme.

Da das System aller Kreise um einen Punkt die ganze Ebene lückenlos bedeckt, so folgt zugleich aus dem vorigen, daß *irgend zwei Punkte in unserer ebenen Geometrie stets durch eine wahre Gerade verbunden werden können.*

§ 41.

Wir haben nun zu zeigen, daß *die Kongruenzaxiome in unserer ebenen Geometrie gültig sind.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen bestimmten wahren Kreis $\varkappa$ aus und führen für die Punkte desselben nach § 18 die Parameterdarstellung durch den Winkel ω ein: dann wird, wenn ω die Werte 0 bis 2π erhält, der wahre Kreis in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Aus dieser Einführung folgt für jeden anderen mit $\varkappa$ kongruenten Kreis ebenfalls ein bestimmter Umlaufssinn, nämlich derjenige, der sich ergibt, wenn wir den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ nach § 22 durch zwei hintereinander angewandte Drehungen mit dem Mittelpunkt des vorgelegten Kreises zur Deckung bringen. Da es im Hinblick auf den zu Anfang dieser Abhandlung definierten Begriff der Bewegung nicht möglich ist, den ursprünglichen Kreis $\varkappa$ mit sich selbst im umgekehrten Umlaufssinn zur Deckung zu bringen, so existiert in der Tat für jeden Kreis ein bestimmter Umlaufssinn.

Jetzt nehmen wir zwei von einem Punkte M ausgehende Halbgeraden, die nicht beide zusammen eine wahre Gerade ausmachen, schlagen um M einen zu $\varkappa$ kongruenten Kreis und fixieren dasjenige von den Halbgeraden ausgeschnittene Stück dieses Kreises, welches einem unterhalb der Zahl π liegenden Parameterintervall entspricht. Der festgesetzte Umlaufssinn führt dann innerhalb des fixierten Kreisbogenstückes von einer der beiden Halbgeraden zu der anderen Halbgeraden: wir bezeichnen die erstere Halbgeraden als den rechten, die letztere Halbgerade als den linken Schenkel des Winkels zwischen beiden Halbgeraden, während das Parameterintervall ($< \pi$) selbst das Maß für diesen Winkel abgibt. Aus unserem Begriffe

der Bewegung folgt dann der erste Kongruenzsatz für zwei Dreiecke in folgender Gestalt:

Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, wenn ferner AB bez. $A'B'$ die rechten, AC bez. $A'C'$ die linken Schenkel der Winkel BAC bez. $B'A'C'$ sind, so gelten stets auch die Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B',$$
$$BC \equiv B'C'.$$

§ 42.

Nachdem in §§ 30—40 die wahre Gerade definiert und ihre Eigenschaften abgeleitet worden sind, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens nehmen wir an, daß es durch einen Punkt nur *eine* Gerade gibt, die eine gegebene Gerade nicht schneidet (Parallelenaxiom). Für unsere Ebene gelten dann die sämtlichen ebenen Axiome, die ich in meiner Festschrift über die Grundlagen der Geometrie (Kap. I) aufgestellt habe, nur daß das Kongruenzaxiom IV, 6 dort in der vorhin in § 41 aufgestellten engeren Fassung zu nehmen ist. Auch bei dieser engeren Fassung des letzten Kongruenzaxioms folgt mit Notwendigkeit die Euklidische ebene Geometrie (vgl. Anhang II S. 92—S. 95).

Zweitens nehmen wir an, daß es durch jeden Punkt A zwei Halbgerade gibt, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, und die eine gegebene Gerade g nicht schneiden, während jede in dem durch sie gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die Gerade g schneidet; dabei liege A außerhalb g.

Mit Hilfe der Stetigkeit folgt dann leicht, daß auch umgekehrt zu irgend zwei von einem Punkte A ausgehenden Halbgeraden, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, stets eine bestimmte Gerade g gehört, die jene beiden Halbgeraden nicht schneidet, dagegen von jeder anderen Halbgeraden getroffen wird, die von A ausgeht und in dem Winkelraum zwischen den beiden gegebenen Halbgeraden verläuft. Unter diesen Umständen folgt dann die Bolyai-Lobatschefskysche ebene Geometrie, auch wenn wir das Kongruenzaxiom IV, 6 in der vorhin aufgestellten engeren Fassung zu Grunde legen, wie sich dies mit Hilfe meiner „Enden“-Rechnung[1]) zeigen läßt.

---

1) Vgl. meine Abhandlung: Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie, Anhang III. Das dort eingeschlagene Beweisverfahren ist für den gegenwärtigen Zweck in geeigneter Weise abzuändern, so daß die Stetigkeit herangezogen, dagegen die Anwendung des Satzes von der Gleichheit der Basiswinkel im gleich-

Zum Schlusse möchte ich auf den charakteristischen Unterschied hinweisen, der uns entgegentritt, wenn wir die vorstehende Begründung der Geometrie mit derjenigen vergleichen, die ich in meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie" zu geben versucht habe. In dieser Festschrift ist eine solche Anordnung der Axiome befolgt worden, wobei die Stetigkeit hinter allen übrigen Axiomen an *letzter* Stelle gefordert wird, so daß dann naturgemäß die Frage in den Vordergrund tritt, inwieweit die bekannten Sätze und Schlußweisen der elementaren Geometrie von der Forderung der Stetigkeit unabhängig sind. In der vorstehenden Untersuchung dagegen wird die Stetigkeit vor allen übrigen Axiomen an *erster* Stelle durch die Definition der Ebene und der Bewegung gefordert, so daß hier vielmehr die wichtigste Aufgabe darin bestand, das geringste Maß von Forderungen zu ermitteln, um aus demselben unter weitester Benutzung der Stetigkeit die elementaren Gebilde der Geometrie (Kreis und Gerade) und ihre zum Aufbau der Geometrie notwendigen Eigenschaften gewinnen zu können. In der Tat hat die vorstehende Untersuchung gezeigt, daß hierzu die in den obigen Axiomen I—III ausgesprochenen Forderungen hinreichend sind.

Göttingen, den 10. Mai 1902.

Anhang V.

Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung[1]).

Über Flächen von negativer konstanter Krümmung.

Nach Beltrami[2]) verwirklicht eine Fläche von negativer konstanter Krümmung ein Stück einer Lobatschefskyschen (Nicht-Euklidischen) Ebene, wenn man als Geraden der Lobatschefskyschen Ebene die geodätischen Linien der Fläche von konstanter Krümmung betrachtet und als Längen und Winkel in der Lobatschefskyschen Ebene die wirklichen Längen und Winkel auf der Fläche nimmt. Unter den bisher untersuchten Flächen negativer konstanter Krümmung finden wir *keine*, die sich stetig und mit stetiger Änderung ihrer Tangentialebene in der Umgebung jeder Stelle überallhin ausdehnt; vielmehr besitzen die bekannten

---

schenkligen Dreiecke vermieden wird. Um die Sätze über die Addition der Enden (S. 115—S. 117) zu gewinnen, betrachten wir die Addition als Grenzfall einer Drehung der Ebene, wenn der Drehpunkt auf einer Geraden ins Unendliche rückt.

1) Presented to the Society, October 27, 1900. Received for publication October 9, 1900.

2) Giornale di Matematiche, Bd. 6, 1868.

Flächen negativer konstanter Krümmung singuläre Linien, über die hinaus eine stetige Fortsetzung mit stetiger Änderung der Tangentialebene nicht möglich ist. Aus diesem Grunde gelingt es mittels keiner der bisher bekannten Flächen negativer konstanter Krümmung, die *ganze* Lobatschefskysche Ebene zu verwirklichen, und es erscheint uns die Frage von prinzipiellem Interesse, *ob die ganze Lobatschefskysche Ebene überhaupt nicht durch eine analytische*[1]) *Fläche negativer konstanter Krümmung auf die Beltramische Weise zur Darstellung gebracht werden kann.*

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir von der Annahme einer analytischen Fläche der negativen konstanten Krümmung -1 aus, die im Endlichen überall sich regulär verhält und keine singulären Stellen aufweist; wir werden dann zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Eine solche Fläche, wie wir sie annehmen wollen, ist durch folgende Aussagen vollständig charakterisiert:

Jede im Endlichen gelegene Verdichtungsstelle von Punkten der Fläche ist ebenfalls ein Punkt der Fläche.

Bedeutet O irgend einen Punkt der Fläche, so ist es stets möglich, die rechtwinkligen Koordinatenaxen x, y, z so zu legen, daß O der Anfangspunkt des Koordinatensystems wird und die Gleichung der Fläche in der Umgebung dieses Punktes O wie folgt lautet:

$$z = ax^2 + by^2 + \mathfrak{P}(x, y), \tag{1}$$

wo die Konstanten a, b die Relation

$$4ab = -1$$

befriedigen und die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y)$ nur Glieder dritter oder höherer Dimension in x, y enthält. Offenbar ist dann die z-Achse die Normale der Fläche und die x- und y-Achse geben die Richtungen an, die durch die Hauptkrümmungen der Fläche bestimmt sind.

Die Gleichung

$$ax^2 + by^2 = 0$$

bestimmt die beiden Haupttangenten der Fläche durch den Punkt O in der xy-Ebene; dieselben sind daher stets voneinander getrennt und geben

1) Der leichteren Ausdrucksweise wegen setze ich hier für die zu betrachtende Fläche analytischen Charakter voraus, obwohl die Beweisführung und das erlangte Resultat (vgl. S. 172) gültig bleiben, wenn in Gleichung (1) $\mathfrak{P}(x, y)$ eine genügend oft differentierbare nichtanalytische Funktion von x, y bedeutet. Daß es tatsächlich reguläre und nicht analytische Flächen von konstanter negativer Krümmung gibt, hat auf meine Anregung hin G. Lütkemeyer in seiner Inauguraldissertation: Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen, Göttingen 1902, bewiesen.

die Richtungen an, in denen die beiden Asymptotenkurven der Fläche durch den beliebigen Punkt O verlaufen. Jede dieser Asymptotenkurven gehört einer einfachen Schar von Asymptotenkurven an, die die ganze Umgebung des Punktes O auf der Fläche regulär und lückenlos überdecken. Verstehen wir daher unter u, v genügend kleine Werte, so können wir gewiß folgende Konstruktion ausführen. Wir tragen auf einer der beiden durch O gehenden Asymptotenkurven den Parameterwert u von O als Länge ab, ziehen durch den erhaltenen Endpunkt die andere mögliche Asymptotenkurve und tragen auf dieser den Parameterwert v als Länge ab: der nun erhaltene Endpunkt ist ein Punkt der Fläche, der durch die Parameterwerte u, v eindeutig bestimmt ist. Fassen wir demgemäß die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Fläche als Funktionen von u, v auf, indem wir setzen:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

so sind diese jedenfalls für genügend kleine Werte von u, v reguläre analytische Funktionen von u, v.

Die bekannte Theorie der Flächen von der konstanten Krümmung -1 liefert uns ferner die folgenden Tatsachen:

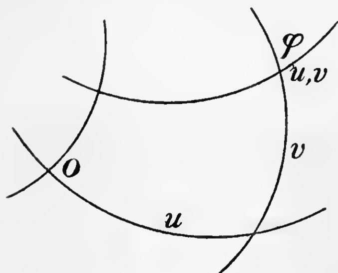
Bedeutet φ den Winkel zwischen den beiden Asymptotenkurven durch den Punkt u, v, so erhalten die drei Fundamentalgrößen der Fläche die Werte:

$$e \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$f \equiv \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \cos\varphi,$$

$$g \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$$

und mithin wird das Quadrat der Ableitung der Bogenlänge einer beliebigen Kurve auf der Fläche nach einem Parameter t von der Form:



$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\cos\varphi\,\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \tag{2}$$

Der Winkel φ genügt als Funktion von u, v der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \sin\varphi. \tag{3}$$

Die Formeln (2) und (3) beweisen den bekannten Satz:[1])

1) Dini, Annali di Mathematica, Bd. 4, 1870, S. 175. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, Nr. 773. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, § 67.

In jedem Vierecke, das von vier Asymptotenkurven unserer Fläche gebildet wird, sind die gegenüberliegenden Bogen einander gleich.

Die Formel (3) gestattet die Berechnung des Flächeninhaltes eines von Asymptotenkurven gebildeten Viereckes mittels seiner Winkel; Darboux[1]) ist auf diesem Wege zu dem folgenden Satze gelangt:

Der Flächeninhalt eines aus Asymptotenkurven gebildeten Viereckes auf unserer Fläche ist gleich der Summe der Winkel des Viereckes vermindert um 2π.

Die Formeln (1) liefern eine Parameterdarstellung unserer Fläche, bei welcher die Koordinatenlinien

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

die Asymptotenkurven sind. Nach den obigen Ausführungen erweisen sich die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gewiß für genügend kleine Werte von u, v als umkehrbar eindeutige Funktionen der Variabeln u, v d. h. die Formeln (1) vermitteln jedenfalls die umkehrbar eindeutige Abbildung eines *Stückes der* uv-Ebene in der Umgebung des Punktes $u = 0$, $v = 0$ auf ein *Stück* unserer Fläche in der Umgebung des Punktes O. Unsere Aufgabe besteht darin, die gesamte Abbildung der uv-Ebene auf unsere Fläche zu untersuchen, welche durch die analytische Fortsetzung der Formeln (1) erhalten wird.

Fassen wir irgend eine Asymptotenkurve unserer Fläche ins Auge, so erkennen wir sofort, daß dieselbe im Endlichen keinen singulären Punkt haben und daher auch nirgends aufhören darf; denn bei Annahme einer solchen singulären Stelle könnten wir in dieselbe den Punkt O verlegen und dies gäbe einen Widerspruch mit unseren früheren Ausführungen, wonach durch O stets zwei reguläre Asymptotenkurven hindurchlaufen und eine genügend kleine Umgebung des Punktes O auf unserer Fläche durch regulär verlaufende Asymptotenkurven lückenlos erfüllt wird.

Aus diesem Umstande entnehmen wir die analytische Tatsache, daß die Funktionen x, y, z für alle rellen u, v eindeutig und unbegrenzt fortsetzbar sind. Um dies sicher zu erkennen, tragen wir vom Punkte O aus auf der Asymptotenkurve $v = 0$ die Länge u nach der einen oder anderen Richtung, jenachdem u positiv oder negativ ist, ab, ziehen durch den erhaltenen Endpunkt die andere Asymptotenkurve, tragen dann auf dieser die Länge v nach der einen oder anderen Richtung hin, je-

1) loc. cit., Bd. 3, Nr. 773.

nachdem v positiv oder negativ ausfällt, ab und erteilen endlich dem so erhaltenen Endpunkte, der die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z haben möge, die Parameterwerte u, v. Auf diese Weise ist jedem Punkte der uv-Ebene jedenfalls ein bestimmter Punkt unserer Fläche zugeordnet und die Funktionen x, y, z, die diese Zuordnung vermitteln, sind eindeutige für alle reellen Variabeln u, v definierte und reguläre analytische Funktionen.

Auch zeigt sich sofort, daß umgekehrt jedem Punkte unserer Fläche mindestens ein Wertepaar u, v entspricht. Um dies einzusehen, bezeichnen wir diejenigen Punkte, deren Koordinaten durch Funktionswerte

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v)$$

dargestellt werden, mit P, dagegen die Punkte der Fläche, die durch unsere Abbildung nicht betroffen werden, mit Q. Würden nun im Endlichen ein oder mehrere Punkte Q vorhanden sein, so müßte es gewiß mindestens einen Punkt A auf der Fläche geben, in dessen beliebiger Nähe sowohl Punkte P als auch Punkte Q gelegen sind.

Nach den früheren Ausführungen existieren nun für die Umgebung des Punktes A zwei Scharen von Asymptotenkurven, deren jede diese Umgebung einfach und lückenlos überdeckt. Unter diesen Asymptotenkurven muß notwendig mindestens eine solche vorhanden sein, die sowohl einen Punkt P als auch einen Punkt Q enthält. In der Tat, fassen wir eine der beiden durch A hindurchgehenden Asymptotenkurven ins Auge und nehmen wir an, dieselbe bestände aus lauter Punkten P (bez. Q), so würden die Asymptotenkurven derjenigen Schar, zu welcher jene erstere Asymptotenkurve nicht gehört, mindestens je einen Punkt P (bez. Q) nämlich den Schnittpunkt mit der ersteren Asymptotenkurve enthalten. Die sämtlichen Kurven dieser Schar können aber gewiß nicht aus lauter Punkten P (bez. Q) bestehen, da sonst die ganze Umgebung von A nur Punkte P (bez. Q) enthielte.

Es sei nun l die Länge eines Stückes einer Asymptotenkurve, deren Anfangspunkt ein Punkt P und deren Endpunkt ein Punkt Q sein möge. Fassen wir die beiden durch den Anfangspunkt P laufenden Asymptotenkurven der Fläche ins Auge, so ist jenes Stück von der Länge l notwendig die Fortsetzung einer dieser beiden Asymptotenkurven, und wenn daher u, v die Koordinaten des Anfangspunktes P sind, so wird der Endpunkt jenes Kurvenstückes entweder durch die Parameterwerte $u \pm l, v$ oder $u, v \pm l$ dargestellt — entgegen unserer Annahme, derzufolge der Endpunkt Q nicht durch die Formeln (1) darstellbar sein sollte.

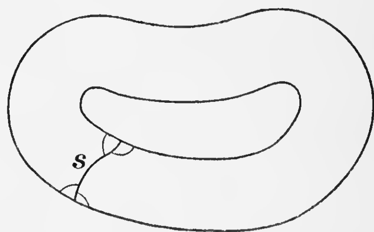
Damit ist bewiesen worden, daß durch die Formeln (1) die ganze Fläche zur Darstellung gebracht wird, wenn u, v alle reellen Zahlenwerte durchläuft.

Endlich ist es für unsere Untersuchung notwendig, einzusehen, daß die Formeln (1) jeden Punkt der Fläche nur durch *ein* Wertepaar u, v darstellen, d. h. daß die gefundene Abbildung unserer Fläche auf die uv-Ebene nicht bloß für genügend kleine Gebiete, sondern im ganzen genommen eine *umkehrbar*-eindeutige sein muß.

Wir beweisen zu dem Zwecke der Reihe nach folgende Sätze:

1. *Es gibt auf unserer Fläche keine geschlossene, d. h. in sich zurückkehrende Asymptotenkurve.*

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil an, es sei eine solche Asymptotenkurve auf unserer Fläche vorhanden. Wir konstruieren durch jeden Punkt derselben die andere Asymptotenkurve und tragen auf diesen Kurven stets ein Stück s nach derselben Seite ab. Die erhaltenen Endpunkte werden dann entweder eine in sich zurücklaufende Asymptotenkurve bilden, oder die Endpunkte des Stückes s beschreiben erst nach zweimaligem Durchlaufen der Grundkurve eine in sich zurückkehrende Asymptotenkurve — ein Fall, der eintreten könnte, wenn unsere Fläche eine sogenannte Doppelfläche wäre. Fassen wir nun eine derjenigen Asymptotenkurven von der Länge s ins Auge, die uns vorhin zur Konstruktion der neuen geschlossenen Asymptotenkurve dienten, so bildet dieselbe doppelt gerechnet zusammen mit den beiden geschlossenen Asymptotenkurven ein Asymptotenviereck, dessen Winkelsumme offenbar genau gleich 2π ist. Diese Tatsache aber steht im Widerspruch zu dem vorhin angeführten Satze, wonach der Inhalt eines Asymptotenkurvenvierecks stets gleich dem Überschuß der Summe seiner Winkel über 2π ist und dieser Überschuß daher notwendig positiv sein muß.



2. *Irgend zwei durch einen Punkt gehende Asymptotenkurven schneiden sich in keinem anderen Punkte unserer Fläche.*

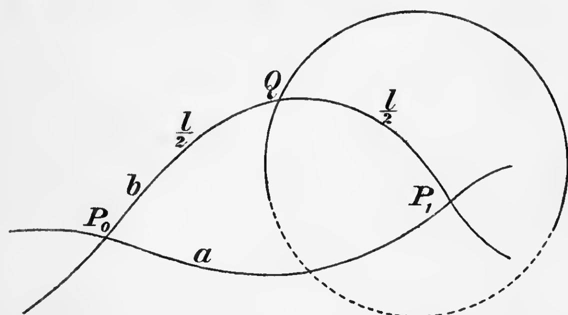
Wir denken uns eine Asymptotenkurve a nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängert und dann durch einen Punkt P_0 derselben nach einer Seite die andere Asymptotenkurve b gezogen. Nehmen wir dann im Gegensatz zu unserer Behauptung an, daß diese Asymptotenkurve b die ursprüngliche a zum erstenmal im Punkt P_1 schnitte, so sind die folgenden zwei Fälle denkbar:

Erstens: die Asymptotenkurve b könnte so verlaufen, daß sie in P_1 von derselben Seite der Asymptotenkurve a her eintritt, als sie dieselbe verlassen hat;

Zweitens: die Asymptotenkurve b könnte derart verlaufen, daß sie

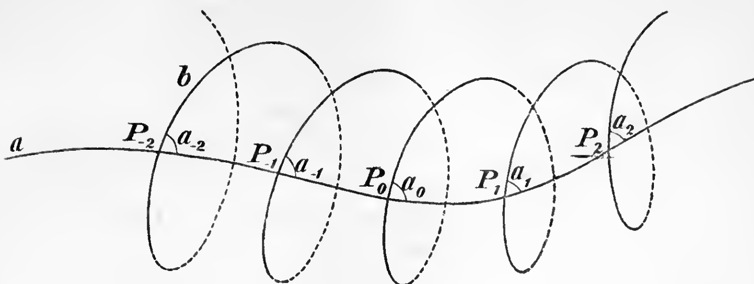
von der anderen Seite der ursprünglichen Asymptotenkurve a herkommt und mithin nach Verlassen des Schnittpunktes P_1 nach der nämlichen Seite der Asymptotenkurve a gerichtet ist, wie anfänglich, als sie vom Punkte P_0 ausging.

Wir wollen zeigen, daß beide Fälle unmöglich sind. Was den *ersten* Fall betrifft, so bezeichnen wir die Länge der Strecke P_0P_1 auf a mit l und die Mitte dieser Strecke mit Q. Sodann denken wir uns durch jeden Punkt der Asymptotenkurve a die andere Asymptotenkurve gezogen und nach der Seite, nach welcher hin die fragliche Strecke P_0P_1 auf b liegt, die Länge $\frac{1}{2}l$ abgetragen. Aus den Punkten P_0 und P_1 der Kurve a erhalten wir auf diese Weise den nämlichen Punkt Q als Endpunkt. Die sämtlichen erhaltenen Endpunkte bilden mithin eine Asymptotenkurve, welche durch den Punkt Q geht und zu demselben Punkte Q mit der nämlichen Tangente zurückkehrt. Dies ist unmöglich, da es nach 1. auf unserer Fläche keine geschlossene Asymptotenkurve gibt.



Damit ist gezeigt, daß der erste Fall nicht stattfinden kann. Aber auch der *zweite* Fall ist unmöglich. Verliefe nämlich die Asymptotenkurve in der Weise, daß sie nach Überschreitung des Schnittpunktes P_1 die nämliche Richtung aufweist, wie früher in P_0, so könnten wir die Fortsetzung dieses Stückes P_0P_1 der Asymptotenkurve b über P_1 hinaus offenbar dadurch erhalten, daß wir von P_0 ausgehend durch jeden Punkt des Stückes P_0P_1 von b die andere Asymptotenkurve konstruieren und auf allen diesen Asymptotenkurven nach der betreffenden Seite hin das gleiche Stück P_0P_1 der Asymptotenkurve a abtragen. Die erhaltenen Endpunkte bilden die Fortsetzung der Asymptotenkurve b von P_1 bis zu einem Punkte P_2 auf a. Aus diesem Stücke P_1P_2 der Asymptotenkurve b können wir in gleicher Weise ein neues Stück der Asymptotenkurve b konstruieren, welches über P_2 hinausgeht und bis zu einem Punkte P_3 auf a reicht u. s. f. Auch ist klar, wie wir die Asymptotenkurve b nach der anderen Richtung hin über P_0 hinaus durch die entsprechende Konstruktion fortsetzen können und so der Reihe nach zu den Kurvenstücken $P_0P_{-1}, P_{-1}P_{-2}, \ldots$ gelangen. Die Asymptotenkurve b schneidet also die Asymptotenkurve a in den unendlich vielen gleichweit voneinander entfernten Punkten:

$$\ldots P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$$



Die Winkel, die die Asymptotenkurve b mit a in bestimmtem Sinne in jenen Schnittpunkten bildet, bezeichnen wir bez. mit

$$\ldots a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Wir betrachten nun das Asymptotenkurvenviereck $P_0 P_1 P_2 P_1 P_0$, welches von den Stücken $P_0 P_1$ auf a, $P_1 P_2$ auf b, $P_2 P_1$ auf a, $P_1 P_0$ auf b gebildet wird. Die vier Winkel dieses Vierecks sind

$$a_0, \quad \pi - a_1, \quad a_2, \quad \pi - a_1,$$

und da nach dem angeführten Satze über das Asymptotenkurvenviereck der Inhalt desselben gleich dem Überschuß der Summe seiner Winkel über 2π ist und dieser Überschuß daher positiv sein muß, so folgt

$$a_0 + \pi - a_1 + a_2 + \pi - a_1 > 2\pi,$$

d. h.

(4) $$a_0 - a_1 > a_1 - a_2.$$

Ebenso folgt allgemein

(5) $$a_k - a_{k+1} > a_{k+1} - a_{k+2}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Wegen der obigen Ungleichung (4) können jedenfalls $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ nicht zugleich 0 sein; wir dürfen die Annahme

$$a_0 - a_1 \neq 0$$

treffen. Aus (5) folgen die Ungleichungen:

(6) $$a_{-p} - a_{-p+1} > a_0 - a_1 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

und

$$a_0 - a_1 > a_p - a_{p+1}$$

oder

(7) $$a_{p+1} - a_p > a_1 - a_0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Bilden wir die Ungleichungen (6) und (7) für $p = 1, 2, 3 \ldots, n$, so folgt durch Addition derselben leicht

$$a_{-n} > a_0 + n(a_0 - a_1),$$
$$a_{n+1} > a_1 + n(a_1 - a_0).$$

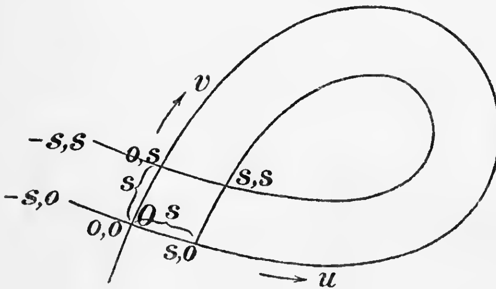
Fällt nun $a_0 - a_1 > 0$ aus, so ist für genügend große Werte von n jedenfalls die erstere dieser beiden Gleichungen unmöglich, da die Winkel a_k sämtlich kleiner als π sind; fällt dagegen $a_1 - a_0 > 0$ aus, so folgt aus demselben Grunde für genügend große Werte von n die Unmöglichkeit der letzteren Gleichung.

Die Asymptotenkurve b darf daher auf keine der beiden angenommenen Arten verlaufen und mithin ist der Beweis für 2. vollständig erbracht.

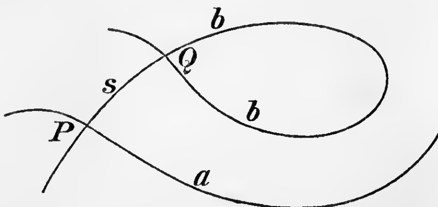
3. *Eine Asymptotenkurve unserer Fläche durchsetzt sich selbst an keiner Stelle, d. h. sie besitzt keinen Doppelpunkt.*

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil an, es existiere eine Asymptotenkurve mit einem Doppelpunkt; dann verlegen wir den Anfangspunkt der krummlinigen Koordinaten u, v in diesen Doppelpunkt und wählen die beiden Zweige der Kurvenschleife zu Koordinatenlinien, nach der Schleife hin den positiven Sinn gerechnet.

Wir ziehen jetzt vom Punkte $(-s, 0)$ beginnend auf der u-Koordinatenlinie durch jeden Punkt derselben die andere Asymptotenkurve und tragen auf dieser nach der positiven Seite hin eine Strecke s ab: wählen wir diese Strecke s genügend klein, so werden die sämtlichen erhaltenen Endpunkte nach einem oben angeführten Satze über das Asymptotenkurvenviereck wiederum eine Asymptotenkurve bilden. Diese Asymptotenkurve geht vom Punkte $(-s, s)$ aus, läuft durch den Punkt (s, s) und endigt im Punkte $(s, 0)$ bez. $(-s, 0)$, durchsetzt sich daher selbst in (s, s) bez. $(-s, s)$. Wir sehen also, daß die soeben konstruierte Asymptotenkurve die ursprüngliche Asymptotenkurve in zwei verschiedenen Punkten $(0, s)$ und $(s, 0)$ bez. $(0, s)$ und $(-s, 0)$ schneidet; dies ist nach 2. unmöglich.



4. *Wenn wir durch jeden Punkt einer Asymptotenkurve a die andere Asymptotenkurve ziehen und auf dieser nach der nämlichen Seite hin eine bestimmte Strecke s abtragen, so bilden die erhaltenen Endpunkte eine neue Asymptotenkurve b, die die ursprüngliche Asymptotenkurve a an keiner Stelle schneidet.*



Denn wäre P ein Schnittpunkt der Asymptotenkurve b mit der ursprünglichen a, und tragen wir der im Satze angegebenen Kon-

struktion zufolge von P aus auf der Asymptotenkurve b die Strecke s nach der betreffenden Seite von a hin ab, so bekommen wir einen durch den entstehenden Endpunkt Q hindurchgehenden Asymptotenkurvenzweig, der ebenfalls zur Asymptotenkurve b gehören müßte und andererseits den anfangs betrachteten Zug der Kurve b in Q schneidet; mithin wäre Q ein Doppelpunkt der Asymptotenkurve b; das Auftreten eines Doppelpunktes ist aber nach 3. unmöglich.

Aus den Sätzen 1. bis 4. können wir sofort diese Schlußfolgerungen ziehen: *Die sämtlichen Asymptotenkurven unserer Fläche zerfallen in zwei Scharen. Irgend zwei derselben Schar angehörende Asymptotenkurven schneiden sich nicht; dagegen schneiden sich je zwei Asymptotenkurven, die verschiedenen Scharen angehören, stets in einem und nur einem Punkte der Fläche.*

Die Koordinatenlinien $u=0$, $v=0$ sind zwei Asymptotenkurven, die verschiedenen Scharen angehören. Wegen der Bedeutung der Koordinaten u, v als Längen gewisser Koordinatenabschnitte entnehmen wir aus den eben ausgesprochenen Tatsachen zugleich, daß zu bestimmt gegebenen Werten von u, v stets nur ein Punkt unserer Fläche gehört d. h. *die zu untersuchende Abbildung* (1) *unserer Fläche auf die uv-Ebene ist notwendig eine umkehrbar eindeutige. Insbesondere folgt hieraus, daß unsere Fläche einen einfachen Zusammenhang besitzt und keine Doppelfläche ist.*

Nachdem wir zu dieser wichtigen Einsicht gelangt sind, berechnen wir den gesamten Inhalt unserer Fläche auf zwei Wegen; wir werden dadurch zu einem Widerspruch gelangen.

Der erstere Weg ist der folgende. Wir betrachten auf unserer Fläche dasjenige aus Asymptotenkurven gebildete Viereck, dessen Ecken durch die Koordinaten

$$u, v; \quad -u, v; \quad -u, -v; \quad u, -v$$

bestimmt sind. Da jeder Winkel dieses Vierecks $<\pi$ sein muß, so ist die Summe der Winkel des Vierecks jedenfalls $<4\pi$ und der Inhalt des Vierecks d. h. der Überschuß der Summe seiner Winkel über 2π ist mithin notwendig $<2\pi$. Lassen wir nun die Werte von u, v unbegrenzt wachsen, so kommt jeder bestimmte Punkt der Fläche sicher einmal im Inneren eines Viereckes zu liegen und bleibt dann im Inneren aller weiteren Vierecke, so daß das unbegrenzt wachsende Viereck schließlich die ganze Oberfläche umfaßt. Wir entnehmen daraus, daß der Gesamtinhalt unserer Fläche $\leqq 2\pi$ sein muß.

Andrerseits betrachten wir die geodätischen Linien auf unserer Fläche. Wegen der negativen Krümmung unserer Fläche ist jede geodätische

Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte gewiß kürzeste Linie, d. h. von kleinerer Länge als jede andere Linie, die auf der Fläche zwischen den nämlichen zwei Punkten verläuft und sich durch stetige Änderung in die geodätische Linie überführen läßt. Wir fassen nun irgend zwei vom Punkt O ausgehende geodätische Linien auf unserer Fläche ins Auge und nehmen an, dieselben schnitten sich noch in einem anderen Punkt P der Fläche. Da nach dem oben Bewiesenen unsere Fläche einen einfachen Zusammenhang besitzt, so läßt sich jede dieser beiden geodätischen Linien OP in die andere durch stetige Veränderung überführen; es müßte also nach dem eben Ausgeführten jede derselben kürzer sein als die andere, was nicht möglich ist. Unsere Annahme der Existenz eines Schnittpunktes P ist also zu verwerfen. Durch die nämlichen Schlüsse erkennen wir auch, daß eine geodätische Linie unserer Fläche weder sich durchsetzen noch in sich selbst zurücklaufen darf.

Denken wir uns nun auf allen von O ausgehenden geodätischen Linien die gleiche Länge r abgetragen, so bilden die erhaltenen Endpunkte eine geschlossene doppelpunktslose Kurve auf unserer Fläche. Das von dieser Kurve umspannte Gebiet besitzt nach den bekannten Formeln der Lobatschefskyschen Geometrie den Flächeninhalt

$$\pi\left(e^{\frac{r}{2}}-e^{-\frac{r}{2}}\right)^2.$$

Da dieser Ausdruck für unendlich wachsende Werte von r selbst über alle Grenzen wächst, so entnehmen wir hieraus, daß auch der Gesamtinhalt unserer Fläche unendlich groß sein müßte. Diese Folgerung steht im Widerspruch mit der vorhin bewiesenen Tatsache, wonach jener Inhalt stets $\leqq 2\pi$ ausfallen sollte. Wir sind daher gezwungen, unsere Grundannahme zu verwerfen, d. h. wir erkennen, *daß es eine singularitätenfreie und überall regulär analytische Fläche von konstanter negativer Krümmung nicht gibt. Insbesondere ist daher auch die zu Anfang aufgeworfene Frage zu verneinen, ob auf die Beltramische Weise die ganze Lobatschefskysche Ebene durch eine regulär analytische*[1]) *Fläche im Raume sich verwirklichen läßt.*

Über Flächen von positiver konstanter Krümmung[2]).

Wir gingen zu Anfang dieser Untersuchung aus von der Frage nach einer Fläche negativer konstanten Krümmung, die überall im Endlichen regulär analytisch verläuft, und gelangten zu dem Resultate, daß

1) Vgl. die Anmerkung auf S. 163.

2) Die Frage der Verwirklichung der Nicht-Euklidischen elliptischen ebenen Geometrie durch die Punkte einer überall stetig gekrümmten Fläche ist auf meine

es eine solche Fläche nicht gibt. Wir wollen nunmehr mittels der entsprechenden Methode die gleiche Frage für positive konstante Krümmung behandeln. Offenbar ist die Kugel eine geschlossene singularitätenfreie Fläche positiver konstanten Krümmung, und nach dem von H. Liebmann[1]) auf meine Anregung hin geführten Beweise gibt es auch keine andere geschlossene Fläche von derselben Eigenschaft. Diese Tatsache nun wollen wir aus einem Satze herleiten, der von einem beliebigen singularitätenfreien Stücke einer Fläche positiver konstanten Krümmung[2]) gilt und folgendermaßen lautet:

Auf einer Fläche der positiven konstanten Krümmung $+1$ *sei ein singularitätenfreies einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet im Endlichen abgegrenzt; denken wir uns dann in jedem Punkte dieses Gebietes sowie in den Randpunkten desselben die beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche konstruiert, so wird das Maximum der größeren und folglich auch das Minimum der kleineren der beiden Hauptkrümmungsradien gewiß in keinem Punkte angenommen, der im Inneren des Gebietes liegt — es sei denn unsere Fläche ein Stück der Kugel mit dem Radius* 1.

Zum Beweise bedenken wir zunächst, daß wegen unserer Voraussetzung das Produkt der beiden Hauptkrümmungsradien überall $=1$ und daher der größere der beiden Hauptkrümmungsradien stets $\geqq 1$ sein muß. Aus diesem Grunde ist das Maximum der größeren Hauptkrümmungsradien offenbar nur dann $=1$, wenn beide Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte unseres Flächenstückes $=1$ sind. In diesem besonderen Falle ist jeder Punkt des Flächenstückes ein Nabelpunkt, und man schließt dann leicht in der bekannten Weise, daß das Flächenstück ein Stück der Kugel mit dem Radius 1 sein muß.

Nunmehr sei das Maximum der größeren der beiden Hauptkrümmungsradien unserer Fläche >1; dann nehmen wir im Gegensatz zu der Behauptung an, es gäbe *im Inneren* des Flächenstückes einen Punkt O, in

---

Anregung von W. Boy untersucht worden: Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Inauguraldissertation, Göttingen 1901 und Math. Ann. Bd. 57 1903. W. Boy hat in dieser Arbeit eine topologisch sehr interessante ganz im Endlichen gelegene einseitige geschlossene Fläche angegeben, die abgesehen von einer geschlossenen Doppelkurve mit dreifachem Punkt, in welcher sich die Mäntel der Fläche durchdringen, keine Singularität aufweist und den Zusammenhang der Nicht-Euklidischen elliptischen Ebene besitzt.

1) Göttinger Nachrichten 1899, S. 44. Vgl. ferner die interessanten Arbeiten desselben Verfassars in Math. Ann. Bd. 53 und Bd. 54.

2) Den analytischen Charakter der Flächen konstanter positiver Krümmung nachzuweisen ist G. Lütkemeyer in der S. 163 genannten Inauguraldissertation und E. Holmgren in den Math. Ann. Bd. 57 gelungen.

welchem jenes Maximum stattfinde. Da dieser Punkt O gewiß kein Nabelpunkt sein kann und überdies ein regulärer Punkt unserer Fläche ist, so wird die Umgebung dieses Punktes lückenlos und einfach von jeder der beiden Scharen von Krümmungslinien der Fläche bedeckt. Benutzen wir diese Krümmungslinien als Koordinatenlinien und den Punkt O selbst als Anfangspunkt des krummlinigen Koordinatensystems, so gelten nach der bekannten Theorie der Flächen positiver konstanter Krümmung die folgenden Tatsachen[1]).

Es bedeute r_1 den größeren der beiden Hauptkrümmungsradien für den Punkt (u, v) in der Umgebung des Anfangspunktes $O = (0, 0)$; es ist in dieser Umgebung $r_1 > 1$. Man setze

$$\varrho = \tfrac{1}{2} \log \frac{r_1 + 1}{r_1 - 1};$$

dann genügt die positive reelle Größe ϱ als Funktion von u, v der partiellen Differentialgleichung

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial v^2} = \frac{e^{-2\varrho} - e^{2\varrho}}{4}.$$

Da bei abnehmendem r_1 die Funktion ϱ notwendig wächst, so muß ϱ als Funktion von u, v an der Stelle $u = 0$, $v = 0$ einen Minimalwert aufweisen, und demnach hat die Entwicklung von ϱ nach Potenzen der Variabeln u, v notwendig die Gestalt

$$\varrho = a + \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + \cdots,$$

wo a, α, β, γ Konstante bedeuten und dabei die quadratische Form

$$\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2$$

für reelle u, v niemals negative Werte annehmen darf. Aus letzterem Umstande folgen für die Konstanten α und γ notwendig die Ungleichungen:

$$(9) \qquad \alpha \geqq 0 \quad \text{und} \quad \gamma \geqq 0.$$

Andererseits wollen wir die Entwicklung für ϱ in die Differentialgleichung (8) einsetzen: für $u = 0$, $v = 0$ erhalten wir dann

$$2(\alpha + \gamma) = \frac{e^{-2a} - e^{2a}}{4}.$$

Da die Konstante a den Wert von ϱ im Punkte $O = (0, 0)$ darstellt und mithin positiv ausfällt, so ist hier der Ausdruck rechter Hand jedenfalls < 0; die letztere Gleichung führt deshalb zu der Ungleichung

$$\alpha + \gamma < 0,$$

1) Darboux, Leçons sur la theorie générale des surfaces, Bd. 3, Nr. 776. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, § 264.

welche mit den Ungleichungen (9) in Widerspruch steht. Damit ist unsere ursprüngliche Annahme, wonach die Stelle des Maximums im Inneren des Flächenstückes liege, als unzutreffend und mithin der oben aufgestellte Satz als richtig erkannt.

Der eben bewiesene Satz lehrt offenbar folgende Tatsache. Wenn wir aus der Kugeloberfläche ein beliebiges Stück ausgeschnitten denken und dann dieses Stück beliebig verbiegen, so findet sich das Maximum aller größeren vorkommenden Hauptkrümmungsradien stets auf dem Rande des Flächenstückes. Eine geschlossene Fläche besitzt keinen Rand und daraus folgt, wie bereits oben bemerkt, sofort der Satz, *daß eine geschlossene singularitätenfreie Fläche mit der positiven konstanten Krümmung* 1 *stets die Kugel mit dem Radius* 1 *sein muß.* Dieses Resultat drückt zugleich aus, daß man die Kugel als Ganzes nicht verbiegen kann, ohne daß auf der Fläche irgendwo eine Singularität auftritt.

Göttingen, 1900.

Zum Schlusse spreche ich meinem Freunde Hermann Minkowski und Dr. Max Dehn für ihre Unterstützung beim Lesen der Korrektur und die empfangenen mannigfachen und wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aus.

Göttingen, August 1903.